

Chapitre 2 – Compléments d’algèbres linéaires

Cadre : \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} (le plus souvent \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Sans autre précision, E, F et G désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels et n, p et q désignent des entiers non nuls.

On ne revient pas dans ce chapitre sur les notions suivantes qui doivent être connues : espace vectoriel, sous-espace vectoriel, application linéaire (dont endomorphisme/isomorphisme/automorphisme), famille libre/liée/génératrice, base, dimension finie, théorème du rang et conséquences.

1 Somme de sous-espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1. Somme d’un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E .

On appelle somme de E_1, E_2, \dots, E_p et on note $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ ou $\sum_{k=1}^p E_k$, la partie de E définie par :

$$\sum_{k=1}^p E_k = \left\{ \sum_{k=1}^p x_k \mid \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k \in E_k \right\}.$$

Proposition 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E .

$\sum_{k=1}^p E_k$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contienne tous les sous-espaces vectoriels E_1, E_2, \dots, E_p .

1.2 Somme directe

Définition 2. sous-espaces vectoriels en somme directe

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E .

On dit que E_1, E_2, \dots, E_p sont en somme directe si, pour tout $x \in \sum_{k=1}^p E_k$, il existe un unique p -uplet

$$(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^p x_k.$$

Dans un tel cas, la somme de E_1, E_2, \dots, E_p peut être notée $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ ou $\bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Proposition 2. Caractérisation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E , il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i. E_1, E_2, \dots, E_p sont en somme directe.

ii. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p E_k = \{0\}$.

iii. Il existe un unique p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $\sum_{k=1}^p x_k = 0$.

Proposition 3. Projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit π_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p E_k$.

La famille π_1, \dots, π_p est appelée famille des projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Elle vérifie les relations suivantes :

$$- \sum_{i=1}^p \pi_i = Id;$$

$$- \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j, \pi_i \circ \pi_j = 0.$$

1.3 Définition d'une application linéaire

Proposition 4.

Soient E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

On définit sur $\mathcal{L}(E, F)$ l'application Φ par $\Phi : u \mapsto (u|_{E_1}, \dots, u|_{E_p})$.

Cette application Φ est alors un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_p, F)$

1.4 Cas de la dimension finie

Lemme 1.

Soient E_1, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E de dimensions finies.

Soient $\mathcal{F}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}), \dots, \mathcal{F}_p = (e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ des familles génératrices de E_1, \dots, E_p .

La famille $\mathcal{F} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,q_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ est alors une famille génératrice de

$\sum_{k=1}^p E_k$ (on dit que \mathcal{F} est obtenue par recollement, ou concaténation, de $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$).

Lemme 2.

Soient E_1, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E en somme directe.

Soient $\mathcal{F}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}), \dots, \mathcal{F}_p = (e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ des familles libres de E_1, \dots, E_p .

La famille $\mathcal{F} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,q_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ est alors libre.

Proposition 5.

Soient E_1, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E de dimensions finies.

- i. $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$;
- ii. $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k) \Leftrightarrow E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe.

Proposition 6. Recollement des bases

Soit E de dimension finie et soient E_1, \dots, E_p des sous-espace vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

Soient $\mathcal{B}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}), \dots, \mathcal{B}_p = (e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ des bases de E_1, \dots, E_p .

La famille $\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,q_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,q_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,q_p})$ est alors une base de E .

Proposition 7. Scission d'une base

Soit E de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Si on scinde la base B en p sous-familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ alors, en posant pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $E_k = \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$,

on a $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

2 Matrices par blocs

2.1 Principe et règles de calcul

On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et des entiers r et s tels que $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq t$.

Connaître A revient alors à connaître les blocs $P \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), Q \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K}), R \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$ tels que $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ (écriture de A par blocs).

L'intérêt de cette écriture consiste notamment dans l'application des règles de calcul usuelles, sous réserve de compatibilité des tailles des blocs.

— **Combinaison linéaire**

Soient λ et μ dans \mathbb{K} et soient A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décomposant avec des blocs de tailles identiques : $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix}$.

On a alors $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda P + \mu U & \lambda Q + \mu V \\ \lambda R + \mu W & \lambda S + \mu X \end{pmatrix}$

— **Produit**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, le produit AB est donc défini (il est dans $\mathcal{M}_{n,q}$).

On considère des écritures par blocs de A et B : $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix}$.

Si les tailles de ces blocs sont compatibles (nombre de colonnes de P égal au nombre de lignes de U) on a $AB = \begin{pmatrix} PU + QW & PV + QX \\ RU + SW & RV + SX \end{pmatrix}$.

2.2 Interprétation géométrique

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs $A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K}), V \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K}), W \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$.

Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions p et n munis de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(a) = A$.

Soient $E_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_{s+1}, \dots, e_p)$.

Soient $F_1 = \text{Vect}(f_1, \dots, f_r)$ et $F_2 = \text{Vect}(f_{r+1}, \dots, f_n)$.

On pose alors :

- $u \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ tel que $\text{mat}_{(e_1, \dots, e_s), (f_1, \dots, f_r)}(u) = U$;
- $v \in \mathcal{L}(E_2, F_1)$ tel que $\text{mat}_{(e_{s+1}, \dots, e_p), (f_1, \dots, f_r)}(v) = V$;
- $w \in \mathcal{L}(E_1, F_2)$ tel que $\text{mat}_{(e_1, \dots, e_s), (f_{r+1}, \dots, f_n)}(w) = W$;
- $z \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ tel que $\text{mat}_{(e_{s+1}, \dots, e_p), (f_{r+1}, \dots, f_n)}(z) = Z$.

On a : $\forall x \in E_1, a(x) = u(x) + w(x)$; de même $\forall x \in E_2, a(x) = v(x) + z(x)$.

De plus, en notant $p \in \mathcal{L}(F)$ le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et q le projecteur associé (i.e. sur F_2 parallèlement à F_1), on a alors :

$$u = (p \circ a)|_{E_1}^{F_1} ; v = (p \circ a)|_{E_2}^{F_1} ; w = (q \circ a)|_{E_1}^{F_2} ; z = (q \circ a)|_{E_2}^{F_2}.$$

2.3 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Proposition 8. Cas élémentaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une écriture par blocs de la forme $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où $P \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

Alors $\det(A) = \det(P) \det(S)$.

Proposition 9. Généralisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une écriture par blocs de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r-1} & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & A_{r,r} \end{pmatrix} \text{ où tous les blocs diagonaux sont carrés.}$$

Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^r \det(A_{i,i})$.

3 Matrices semblables (spécifique aux matrices carrées)

Définition 3. Matrices semblables

- Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
- Si A et B sont semblables on note $A \sim B$, la relation \sim est alors une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10. – Lien aux endomorphismes

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme (chacune relativement à une base donnée) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

4 Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

4.1 Définition et endomorphisme induit

Définition 4. Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E , F est dit stable par u si $u(F) \subset F$.

Définition 5. Endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u .

On appelle endomorphisme de F induit par u et on note (parfois) \tilde{u}_F l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F, \tilde{u}_F(x) = u(x)$.

Proposition 11. Endomorphismes commutant

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, les sous-espaces vectoriels $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont alors stables par v .

4.2 Caractérisation matricielle en dimension finie

Proposition 12. Caractérisation matricielle de la stabilité

Soit E de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p non nulle.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\}$ soit une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$.

L'espace F est alors stable par u si, et seulement si, A est triangulaire supérieure par blocs de la forme

$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

De plus, si F est stable par u , dans l'écriture matricielle précédente on a $P = \underset{\{e_1, \dots, e_p\}}{\text{mat}}(\tilde{u}_F)$

Corollaire 1. Généralisation à p sous-espaces vectoriels en somme directe

Soient E_1, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E en somme directe et soit une base \mathcal{B} de E adaptée à la somme $E_1 \oplus \dots \oplus E_p \oplus G$ (où G est un supplémentaire de $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ dans E).

Les sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_p sont alors stables par u si, et seulement si, la matrice de u dans

\mathcal{B} est de la forme : $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_p & B_p \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & B_{p+1} \end{pmatrix}$