

# Chapitre 3 – Réduction des endomorphismes

Cadre :  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  (le plus souvent  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Sans autre précision,  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $n$ ,  $p$  et  $q$  désignent des entiers non nuls.

## 1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

### 1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

#### 1.1.1 Définition

**Définition 1.** Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  s'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  **non nul** tel que  $u(x) = \lambda x$ ; un tel vecteur  $x$  est alors dit vecteur propre de  $u$  relatif à la valeur propre  $\lambda$ .

**Proposition 1.** Vecteurs propres et droites stables

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $x \in E \setminus \{0\}$ ,  $x$  est un vecteur propre de  $u$  si, et seulement si, la droite engendrée par  $x$  (i.e.  $\text{Vect}(x)$ ) est stable par  $u$ .

**Proposition 2.** Caractérisation des valeurs propres

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il y a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i.  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ ;
- ii.  $u - \lambda Id_E$  n'est pas injectif;
- iii.  $\ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$ .

**Définition 2.** Spectre d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé spectre de  $u$  et est noté  $\text{Sp}(u)$ .

#### 1.1.2 Sous-espaces propres d'un endomorphisme

**Définition 3.** Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , l'ensemble  $\ker(u - \lambda Id_E)$  est appelé sous-espace propre de  $u$  relatif à  $\lambda$ .

**Proposition 3.** Indépendance linéaire des vecteurs propres

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

- i. toute famille de vecteurs propres relatifs à des valeurs propres distinctes est libre;
- ii. les sous-espaces propres de  $u$  sont en somme directe.

**Proposition 4.**

Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ , les sous-espaces propres de  $u$  sont alors stables par  $v$ .

## 1.2 Cas de la dimension finie

### 1.2.1 Éléments propres d'une matrice carrée

**Définition 4.** Éléments propres d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors :

- soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  s'il existe une matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  non nulle telle que  $AX = \lambda X$  ; une telle matrice  $X$  est dite vecteur propre de  $A$  relatif à la valeur propre  $\lambda$  ;
- pour  $\lambda$  valeur propre de  $A$ , l'ensemble  $\ker(A - \lambda I_n)$  est appelé sous-espace propre de  $A$  relatif à  $\lambda$  ;
- l'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé son spectre et est noté  $\text{Sp}(A)$ .

**Proposition 5.**

Lien entre les éléments propres d'une matrice carrée et ceux d'un endomorphisme associé

Soit  $E$  de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$ , soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$  alors :

- soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  ;
- soient  $x \in E$  et  $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(x)$ ,  $x$  est vecteur propre de  $u$  si, et seulement si,  $X$  est vecteur propre de  $A$  (et c'est alors relativement à la même valeur propre).

**Corollaire 1.**

Deux matrices semblables ont le même spectre et des sous-espaces propres de même dimension.

### 1.2.2 Cas des matrices à coefficient dans un sous-corps

On suppose que  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}'$  et on considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Par définition le spectre de  $A$ , en tant que matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\} .$$

Puisque  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$  on peut aussi considérer  $A$  comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$  de spectre

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}' \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}') / AX = \lambda X\} .$$

On a alors  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$  mais il n'y a pas toujours égalité.

## 1.3 Polynôme caractéristique

Dans tout ce 1.3.  $E$  est supposé de dimension finie égale à  $n$ .

### 1.3.1 Définition

**Proposition 6.** Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :  
 $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $\det(u - \lambda Id_E) = 0$  .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :  
 $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

**Définition 5.** Polynôme caractéristique

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , le polynôme  $\chi_u$  de  $\mathbb{K}[X]$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_u(x) = \det(x Id_E - u)$  est appelé polynôme caractéristique de  $u$ , ses racines sont exactement les valeurs propres de  $u$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  le polynôme  $\chi_A$  de  $\mathbb{K}[X]$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_A(x) = \det(x I_n - A)$  est appelé polynôme caractéristique de  $A$ , ses racines sont exactement les valeurs propres de  $A$ .

**Proposition 7.** Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est  $\chi_T = \prod_{j=1}^n (X - t_{jj})$ .

**Proposition 8.** Degré et coefficients « extrêmes » du polynôme caractéristique

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\chi_u$  son polynôme caractéristique alors :

$\chi_u$  est de degré  $n$ , unitaire et son coefficient constant est  $(-1)^n \det(u)$ .

### 1.3.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

**Définition 6.** Multiplicité d'une valeur propre

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\chi_u$  son polynôme caractéristique.

On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  de  $u$  son ordre de multiplicité en tant que racine de  $\chi_u$ .

**Proposition 9.** Multiplicité et dimension du sous-espace propre

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'ordre de multiplicité de toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$  est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre de  $u$  associé à cette valeur propre  $\lambda$ .

**Corollaire 2.** Sous-espace propre associé à une valeur propre simple

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $\lambda$  une valeur propre simple de  $u$ , le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$  est de dimension 1.

**Proposition 10.** Éléments propres d'un endomorphisme induit

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  et soit  $\tilde{u}_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$  alors :

- le polynôme caractéristique de  $\tilde{u}_F$  divise celui de  $u$  ;
- toute valeur propre  $\lambda$  de  $\tilde{u}_F$  est valeur propre de  $u$ , l'ordre de  $\lambda$  en tant que valeur propre de  $\tilde{u}_F$  est inférieur à son ordre en tant que valeur propre de  $u$  et le sous-espace propre de  $\tilde{u}_F$  associé à  $\lambda$  est inclus dans le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

## 2 Diagonalisation d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Dans tout cette partie 2,  $E$  est supposé de dimension finie égale à  $n$ .

### 2.1 Notion de diagonalisabilité d'un endomorphisme

**Définition 7.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est dit diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit diagonale.

**Proposition 11.**

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$  (et dans une telle base, la matrice de  $u$  est diagonale).
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable, toute matrice diagonale représentant  $u$  porte sur sa diagonale les valeurs propres de  $u$  apparaissant autant de fois que leur ordre de multiplicité.

**Proposition 12.** Condition suffisante de diagonalisabilité

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet  $n$  valeurs propres distinctes (où  $n = \dim(E)$ ), alors  $u$  est diagonalisable.

## 2.2 Caractérisation par les sous-espaces propres

**Théorème 1.** Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- i. l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable ;
- ii. la somme (directe) des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $E$  ;
- iii. la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $n$  (où  $n = \dim(E)$ ).

Ce théorème peut se décliner sous une formulation logiquement équivalente mais légèrement différente dans la présentation :

**Corollaire 3.**

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si la dimension de chaque sous-espace propre de  $u$  est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

## 3 Diagonalisation d'une matrice carrée

### 3.1 Notion de diagonalisabilité d'une matrice carrée

**Définition 8.**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Si on associe à  $A$  un endomorphisme  $u$  d'un espace de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B}$  donnée, (le plus souvent on pose  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  canoniquement associé à  $A$ ) on a donc  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$ .

Déterminer  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que  $D = P^{-1}AP$  revient à déterminer une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $D = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$ , on aura alors bien  $D = P^{-1}AP$  où  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

Autrement dit : diagonaliser  $A$  consiste à diagonaliser un endomorphisme associé à  $A$ .

### 3.2 Caractérisation par la dimension des sous-espaces propres

**Théorème 2.** Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , les quatre propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- i. la matrice  $A$  est diagonalisable ;
- ii. la somme (directe) des sous-espaces propres de  $A$  est égale à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ;
- iii. la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est égale à  $n$  ;
- iv. le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et la dimension de chaque sous-espace propre de  $A$  est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

## 4 Trigonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Dans toute cette partie 4,  $E$  est supposé de dimension finie égale à  $n$ .

### 4.1 Définition

**Définition 9.** Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

**Proposition 13.**

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable, toute matrice triangulaire supérieure représentant  $u$  porte sur sa diagonale les valeurs propres de  $u$  apparaissant autant de fois que leur ordre de multiplicité.

**Définition 10.** Matrice trigonalisable

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

### 4.2 Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

**Théorème 3.** Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 4.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme caractéristique  $\chi_u$ , alors :

- si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , la trace de  $u$  est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité ;
- le coefficient de degré  $n - 1$  de  $\chi_u$  est  $-tr(u)$ , i.e :

$$\chi_u = X^n - tr(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

## 5 Applications aux endomorphismes nilpotents et aux matrices nilpotentes

### 5.1 Définition de la nilpotence

**Définition 11.** Endomorphisme nilpotent et indice de nilpotence

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent s'il existe un entier  $p$  tel que  $u^p = 0$ .
- Si  $u$  est nilpotent, on appelle indice de nilpotence de  $u$  le plus petit entier  $p$  tel que  $u^p = 0$ .

**Définition 12.** Matrice nilpotente et indice de nilpotence

- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite nilpotente s'il existe un entier  $p$  tel que  $A^p = 0$ .
- Si  $A$  est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de  $A$  le plus petit entier  $p$  tel que  $A^p = 0$ .

### 5.2 Réduction d'un endomorphisme nilpotent ou d'une matrice nilpotente

On suppose que  $E$  est de dimension finie égale à  $n$ .

**Proposition 14.** Spectre d'un endomorphisme nilpotent

Soit un endomorphisme nilpotent  $u \in \mathcal{L}(E)$ , son spectre est égal à  $\{0\}$ .

**Corollaire 5.**

Un endomorphisme nilpotent  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable si, et seulement si, il est nul.

**Proposition 15.** Caractérisation des endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = \{0\}$ .

**Proposition 16.**

Soit un endomorphisme nilpotent  $u \in \mathcal{L}(E)$ , son indice de nilpotence est alors inférieur ou égal à  $n$  (où  $n = \dim(E)$ ).

## 6 Théorème spectral

**Théorème 4.** Théorème spectral

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , toute matrice symétrique est diagonalisable.