Chapitre 5 – Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

Cadre : $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (le plus souvent R ou $\mathbb{C}$; sans autre précision, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels et n, p et q désignent des entiers non nuls.

1 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

1.1 Définition et polynôme annulateur

Définition 1.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$, alors :

— pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par : $P(u) = \sum_{k=0}^{q} a_k u^k$;

— pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $P(A)$ la matrice définie par : $P(A) = \sum_{k=0}^{q} a_k A^k$.

Définition 2. Polynôme annulateur
— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle polynôme annulateur de u tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme annulateur de A tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Proposition 1. Lien à la dépendance linéaire des puissances de u
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $d \in \mathbb{N}$, u admet alors un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à d si, et seulement si, la famille $(u^0, u^1, \ldots, u^d)$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 2. Polynôme en u et vecteur propre de u
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit x un vecteur propre de u relatif à la valeur propre λ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Ce vecteur x est alors un vecteur propre de $P(u)$ relatif à la valeur propre $P(\lambda)$.

Corollaire 1. Polynôme annulateur et valeurs propres
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit P un polynôme annulateur de u.
Toutes les valeurs propres de u sont alors racines de P.

1.2 Morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[u]$ (ou $\mathbb{K}[A]$)

Théorème 1.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

Alors :

i. Cette application φ est un morphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$.

ii. L'image de φ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ notée $\mathbb{K}[u]$ et appelée « algèbre des polynômes en u ».

iii. Le noyau de φ est un idéal (et un sous-espace vectoriel) de $\mathbb{K}[X]$ appelé « idéal annulateur de u ».

Théorème 2.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

Alors :

i. Cette application φ est un morphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

ii. L'image de φ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notée $\mathbb{K}[A]$ et appelée « algèbre des polynômes en A ».

iii. Le noyau de φ est un idéal (et un sous-espace vectoriel) de $\mathbb{K}[X]$ appelé « idéal annulateur de A ».

1.3 Polynôme minimal (en dimension finie)

On suppose dans ce 1.3 que E est de **dimension finie**

Définition 3. Polynôme minimal d'un endomorphisme
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

i. l'idéal annulateur de u n'est pas réduit à $\{0\}$;

ii. on appelle polynôme minimal de u et on note π_u l'unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de u.

Définition 4. Polynôme minimal d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

i. l'idéal annulateur de A n'est pas réduit à $\{0\}$;

ii. on appelle polynôme minimal de A et on note π_A l'unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de A.

Proposition 3.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit d le degré du polynôme minimal de u, la famille $\left(Id_E, u^1, \ldots, u^{d-1}\right)$ est alors une base de $\mathbb{K}[u]$.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit d le degré du polynôme minimal de A, la famille $\left(I_n, A^1, \ldots, A^{d-1}\right)$ est alors une base de $\mathbb{K}[A]$.

1.4 Théorème de Cayley-Hamilton

On suppose dans ce 1.4 que E est de **dimension finie** égale à n.

Théorème 3. Théorème de Cayley-Hamilton - version matricielle
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.

Théorème 4. Théorème de Cayley-Hamilton - version endomorphisme
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Corollaire 2. Lien entre le polynôme minimal et le polynôme caractéristique

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

  i. le polynôme minimal de A divise le polynôme caractéristique de A ;

  ii. le polynôme minimal de A est de degré inférieur ou égal à n ;

  iii. les racines du polynôme minimal de A sont exactement les valeurs propres de A.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

  i. le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u ;

  ii. le polynôme minimal de u est de degré inférieur ou égal à n (où $n = \dim(E)$) ;

  iii. les racines du polynôme minimal de u sont exactement les valeurs propres de u.

2 Application à la réduction des endomorphismes

2.1 Lemme de décomposition des noyaux

Proposition 4. Lemme de décomposition des noyaux

Soient $P_1, .., P_q$ premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ et soit $P = P_1 P_2 \cdots P_q$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on a alors : $\ker(P(u)) = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{q} \ker(P_k(u))$.

Dans toute la fin de ce chapitre, E est supposé être de dimension finie

2.2 Caractérisation de la diagonalisabilité

Théorème 5. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

  i. u est diagonalisable.

  ii. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

  iii. Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

  i. A est diagonalisable.

  ii. A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

  iii. Le polynôme minimal de A est scindé à racines simples.

2.3 Endomorphisme induit

Proposition 5. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (où E est dimension finie), soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit $\tilde{u}_F$ l'endomorphisme de F induit par u.

Le polynôme minimal de $\tilde{u}_F$ divise alors le polynôme minimal de u.

Proposition 6. Endomorphisme induit et diagonalisation

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (où E est dimension finie), soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit $\tilde{u}_F$ l'endomorphisme de F induit par u.

Si u est diagonalisable alors $\tilde{u}_F$ est diagonalisable.

2.4 Codiagonalisation (H.P.)

Proposition 7. codiagonalisation (H.P.)
Soient u et v deux endomorphisme diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie.
u et v commutent si, et seulement si, ils dont diagonalisables dans une même base .

2.5 Sous-espaces caractéristiques

2.5.1 Définition et dimension

Définition 5. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité α.
Alors $\ker((u-\lambda Id)^\alpha)$ est appelé sous-espace caractéristique de u associé à λ.

Proposition 8. dimension d'un sous-espace caractéristique
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité α.
Le sous-espace caractéristique $\ker((u-\lambda Id)^\alpha)$ est de dimension α.

2.5.2 Somme des sous-espaces caractéristiques

Proposition 9.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

- **i.** les sous-espaces caractéristique de u sont en somme directe ;
- **ii.** la somme (directe) des sous-espaces caractéristique de u est égale à E si, et seulement si, χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Proposition 10. Diagonalisation par blocs d'un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u d'ordres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
Il existe alors une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme

$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_p \end{pmatrix}$ où, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, le bloc diagonal B_k est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à λ_k : $B_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & ? & ? \\ 0 & \ddots & ? \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}}_{\alpha_k}$

Corollaire 3. Décomposition de Dunford (H.P.)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe alors un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n qui commutent et tels que $u = d + n$.