Chapitre 6 – Espaces vectoriels normés

Cadre : $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$ soit le corps $\mathbb{C}$ (et pas n'importe quel sous-corps de $\mathbb{C}$).

1 Normes et distances

1.1 Définitions

1.1.1 Norme

Définition 1. Norme
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
• On appelle norme sur E toute application N définie de E vers $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **i.** séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- **ii.** homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
- **iii.** inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

• Si N est une norme sur E, le couple (E,N) est dit être un espace vectoriel normé.

Proposition 1. Variations autour de l'inégalité triangulaire
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, on a alors :

- **i. I.T. généralisée :** $\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p, \forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in K^p, \left\| \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|\, \|x_k\|$;
- **ii. second côté de l'I.T. :** $\forall (x,y) \in E^2, |\, \|x\| - \|y\|\, | \leq \|x+y\|$.

Définition 2. Vecteur unitaire
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et soit x un vecteur de E, alors :
— si $\|x\| = 1$, le vecteur x est dit unitaire ;
— si $x \neq 0$, le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est dit vecteur unitaire associé à x.

1.1.2 Distance associée à une norme

Définition 3. Distance sur un espace vectoriel normé
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, on appelle distance associée à $\|\ \|$ l'application d définie sur E^2 par : $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = \|x-y\|$.
Cette application d vérifie les trois propriétés suivantes :

- **i.** séparation : $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- **ii.** symétrie : $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x)$;
- **iii.** inégalité triangulaire : $\forall (x,y,z) \in E^3, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Définition 4. Distance d'un vecteur à une partie
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, soit A une partie non vide de E et soit x un vecteur de E, on appelle distance de x à A la valeur notée $d(x,A)$ définie par : $d(x,A) = \operatorname*{Inf}_{y \in A}(d(x,y))$.

1.2 Normes de référence

1.2.1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Définition 5.
On définit sur $\mathbb{K}^n$ les normes notées $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ en posant, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

- **i.** $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$;
- **ii.** $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$;
- **iii.** $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Définition 6. Normes subordonnées à une base en dimension finie
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on définit sur E les normes $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ subordonnées à $\mathcal{B}$ en posant, pour tout $x \in E$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$:

- **i.** $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$;
- **ii.** $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$;
- **iii.** $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

1.2.2 Normes intégrales usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

Définition 7.
On définit sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ les normes intégrales $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ en posant, pour tout $f \in E$:

- **i.** $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$;
- **ii.** $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$.

1.2.3 Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$

On considère ici un ensemble A et on note $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$.

Définition 8.
On définit sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ la norme de la convergence uniforme notée $\| \ \|_\infty$ par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \ \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in A} (|f(t)|).$$

1.3 Boules et sphères

1.3.1 Définition

Dans toute cette section, $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé quelconque.

Définition 9. Boules et sphères
Soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, on définit alors sur $(E, \| \ \|)$:
— la boule ouverte de centre a et de rayon r notée $\mathcal{B}_o(a,r)$ par : $\mathcal{B}_o(a,r) = \{x \in E | \ \|x-a\| < r\}$;
— la boule fermée de centre a et de rayon r notée $\mathcal{B}_f(a,r)$ par : $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E | \ \|x-a\| \leq r\}$;
— la sphère de centre a et de rayon r notée $\mathcal{S}(a,r)$ par : $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E | \ \|x-a\| = r\}$.

1.3.2 Convexité

Définition 10. Segment
Soient deux éléments distincts x et y de E, on appelle segment joignant x et y et on note $[x,y]$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de x et de y, i.e. $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}$.

Définition 11. Partie convexe d'un espace vectoriel
Une partie A de E est dite convexe si, pour tout couple $(x,y) \in A^2$, le segment $[x,y]$ est inclus dans A.

Proposition 2. Convexité des boules
Toute boule de E est une partie convexe de E.

1.4 Partie bornée et fonction bornée

Dans toute cette section, $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé quelconque.

Définition 12. Partie bornée
Une partie A de E est dite bornée (pour $\| \ \|$) s'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leq r$.

Définition 13. Fonction bornée
Soit un ensemble Ω, une fonction f de Ω dans E est dite bornée sur Ω (pour $\| \ \|$) si $f(\Omega)$ est une partie bornée de E (pour $\| \ \|$).

1.5 Produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 3. Norme produit
Soient $(E_1, \| \ \|_1), \ldots, (E_p, \| \ \|_p)$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés et soit l'application $\| \ \|$ définie sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ par : $\forall X = (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \|X\| = \max\limits_{1 \leq k \leq p} \left(\|x_1\|_1, \ldots, \|x_p\|_p \right)$.
L'application $\| \ \|$ est alors une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ dite norme produit des normes $\| \ \|_1, \ldots, \| \ \|_p$.

2 Comparaison de normes sur un même espace

2.1 Norme dominée par une autre norme – Hors programme a priori

Définition 14. Norme dominée par une autre (H.P.)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E, on dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E, N_1(x) \leq \lambda N_2(x)$.

Proposition 4. H.P.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2, alors :

i. Toute partie de E bornée pour la norme N_2 est également bornée pour la norme N_1 .

ii. Soit $a \in E$, toute boule de centre a pour N_2 est incluse dans une boule de centre a pour N_1.

iii. Soit $a \in E$, toute boule de centre a pour N_1 contient une boule de centre a pour N_2.

2.2 Normes équivalentes

Définition 15. Normes équivalentes
Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites sont équivalentes si chacune est dominée par l'autre, i.e. s'il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que : $\forall x \in E, \lambda N_2(x) \leq N_1(x) \leq \mu N_2(x)$.

Proposition 5. Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

i. Une partie de E est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour la norme N_2 .

ii. Soit $a \in E$, toute boule de centre a pour l'une des normes contient une boule de centre a pour l'autre norme.

Théorème 1. Équivalence des normes en dimension finie
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans toute cette partie 3, $(E, \| \, \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé quelconque.

3.1 Convergence

3.1.1 Définition et unicité de la limite

Définition 16. Convergence d'une suite vectorielle
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $L \in E$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans $(E, \| \, \|)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \|u_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans un tel cas on note $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = L$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Proposition 6. Unicité de la limite
Une suite convergente de $(E, \| \, \|)$ admet une unique limite dans E.

Proposition 7.
Toute suite convergente de $(E, \| \, \|)$ est bornée.

3.1.2 Combinaison linéaire de suites convergentes

Proposition 8. Linéarité du passage à la limite
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes dans E convergeant respectivement dans $(E, \| \|)$ vers L et vers L'.
Pour tous scalaires λ et μ, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda L + \mu L'$ dans $(E, \| \|)$.

3.1.3 Suites à valeurs dans un espace produit

Proposition 9.
Soient $(E_1, \| \|_1), \dots, (E_p, \| \|_p)$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels normés et soit $\| \|$ la norme produit des normes $\| \|_1, \dots, \| \|_p$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $E = E_1 \times \dots \times E_p$, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)})$.
Soit $L = (L_1, \dots, L_p) \in E$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans $(E, \| \|)$ si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_k dans $(E_k, \| \|_k)$.

3.2 Suite extraite et valeur d'adhérence

Définition 17. Suite extraite
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 10. Suite extraite d'une suite convergente
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans $(E, \| \|)$ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers L dans $(E, \| \|)$.

Définition 18. Valeur d'adhérence
On appelle valeur d'adhérence (dans $(E, \| \|)$) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \| \|)$) d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Convergences d'une même suite pour des normes distinctes

3.3.1 Norme dominée par une autre

Proposition 11.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2.
Toute suite à termes dans E convergente et de limite L pour la norme N_2 est également convergente et de limite L pour la norme N_1.

Corollaire 1.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2 et soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
Toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme N_2 est également valeur d'adhérence pour la norme N_1.

3.3.2 Normes équivalentes

Proposition 12. Invariance de la convergence pour deux normes équivalentes
Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.
Une suite à termes dans E est convergente et de limite L pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est convergente et de limite L pour la norme N_2 .

4 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans ce 3, $(E, \| \,\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, ses éléments sont appelés des points.
Toutes les notions considérées sont dépendantes de la norme $\| \,\|$ considérée.

4.1 Ouvert et intérieur

4.1.1 Intérieur et voisinage

Définition 19. Point intérieur à une partie
Soit $a \in E$ et soit A une partie de E.
On dit que a est intérieur à A si A contient une boule de centre a.

Définition 20. Intérieur d'une partie
On appelle intérieur d'une partie A de E (pour $\| \,\|$) et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points de E intérieurs à A (pour $\| \,\|$) .

Définition 21. Voisinage
Soit $a \in E$ et soit V une partie de E.
On dit que V est un voisinage de a si V contient une boule de centre a (i.e si a est intérieur à V).

Définition 22. Cas des réels : extension à $+\infty$ et à $-\infty$.
Soit V une partie de $\mathbb{R}$, on dit que :
- V est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset V$;
- V est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, a[\subset V$.

4.1.2 Ouvert

Définition 23. Ouvert
Une partie Ω de E est dit être un ouvert de $(E, \| \,\|)$ si elle est voisinage de chacun de ses points.
(i.e. : $\forall a \in \Omega, \exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r) \subset \Omega$).

Proposition 13.
Toute boule ouverte de $(E, \| \,\|)$ est un ouvert de $(E, \| \,\|)$.

Proposition 14. Union et intersection d'ouverts
- Toute réunion d'ouverts de $(E, \| \,\|)$ est un ouvert de $(E, \| \,\|)$.
- Toute intersection finie d'ouverts de $(E, \| \,\|)$ est un ouvert de $(E, \| \,\|)$.

4.1.3 Intérieur et ouvert

Proposition 15. Intérieur et ouvert
Soit une partie A de E dont on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur (pour $\| \,\|$), alors :

i. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de $(E, \| \,\|)$ inclus dans A.

ii. A est un ouvert de $(E, \| \,\|)$ si, et seulement si, $\overset{\circ}{A} = A$.

4.2 Fermé et adhérence

4.2.1 Fermé

Définition 24. Fermé
Une partie A de E est dit être un fermé de $(E, \| \, \|)$ si son complémentaire dans E (i.e $E \setminus A$) est un ouvert de $(E, \| \, \|)$.

Proposition 16.
• Toute boule fermée de $(E, \| \, \|)$ est un fermé de $(E, \| \, \|)$.
• Toute sphère de $(E, \| \, \|)$ est un fermé de $(E, \| \, \|)$.

Proposition 17. Réunion et intersection de fermés
• Toute réunion finie de fermés de $(E, \| \, \|)$ est un fermé de $(E, \| \, \|)$.
• Toute intersection de fermés de $(E, \| \, \|)$ est un fermé de $(E, \| \, \|)$.

4.2.2 Adhérence

Définition 25. Point adhérent à une partie
Soit A une partie de E et soit $a \in E$, a est dit adhérent à A (pour $\| \, \|$) si toute boule de centre a (pour $\| \, \|$) est d'intersection non vide avec A.

Proposition 18. Caractérisation séquentielle des points adhérents
Soit A une partie de E et soit a un point de E, a est adhérent à A (pour $\| \, \|$) si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a (pour $\| \, \|$).

Définition 26. Adhérence d'une partie
Soit A une partie de E, on appelle adhérence de A (pour $\| \, \|$) et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points de E adhérents à A (pour $\| \, \|$).

Proposition 19. Adhérence et fermé
Soit A une partie de E dont on note $\overline{A}$ l'adhérence (pour $\| \, \|$), alors :

i. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $(E, \| \, \|)$ contenant A ;

ii. A est un fermé de $(E, \| \, \|)$ si, et seulement si $A = \overline{A}$.

Corollaire 2. Caractérisation séquentielle des fermés
Une partie A de E est un fermé de $(E, \| \, \|)$ si, et seulement si, toute suite convergente (dans $(E, \| \, \|)$) d'éléments de A a pour limite un élément de A.

4.2.3 Quelques règles de manipulation

Les règles suivantes ne sont pas explicitement au programme mais elles sont d'usage très courant, A et B désignent des parties de l'espace vectoriel normé E :

— si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ (croissance du passage à l'adhérence) ;

— si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ (croissance du passage à l'intérieur) ;

— $E \setminus \overline{A} = (E \overset{\circ}{\setminus} A)$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$ (passage au complémentaire).

4.2.4 Partie dense de E

Définition 27. Partie dense
Une partie A de E est dite dense dans $(E, \| \, \|)$ si son adhérence (pour $\| \, \|$) est égale à E.

4.3 Frontière

Définition 28.
Soit A une partie de E, on appelle frontière de A (pour $\| \ \|$) et on note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

4.4 Ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif

Définition 29.
Soit A une partie de E et soit V une partie de A.
- Soit $a \in E$, on dit que V est un voisinage relatif de a dans A s'il existe une boule $\mathcal{B}$ de centre a telle que $\mathcal{B} \cap A \subset V$.
- On dit que V est un ouvert relatif de A si pour tout $a \in V$, V est un voisinage relatif de a dans A.
- On dit que V est un fermé relatif de A si $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Proposition 20.
Soit A une partie de E ,soit V une partie de A et soit $a \in E$, alors :

i. V est un voisinage relatif de a dans A si, et seulement si, V est l'intersection de A avec un voisinnage de a ;

ii. V est un ouvert relatif de A si, et seulement si, V est l'intersection de A avec un ouvert de E ;

iii. V est un fermé relatif de A si, et seulement si, V est l'intersection de A avec un fermé de E.

Proposition 21. caractérisation séquentielle des fermés relatifs
Soit A une partie de E et soit V une partie de A.
V est un fermé relatif de A si, et seulement si, toute suite d'éléments de V qui converge dans A a pour limite un élément de V.

4.5 Topologies obtenues pour des normes distinctes sur un même espace

4.5.1 Norme dominée par une autre norme

Proposition 22. H.P.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E telles que N_1 soit dominée par N_2, alors :

i. Tout ouvert (resp. fermé) de (E, N_1) est un ouvert (resp. fermé) de (E, N_2)

ii. Pour toute partie A de E, l'adhérence de A pour N_2 est incluse dans l'adhérence de A pour N_1.

iii. Pour toute partie A de E, l'intérieur de A pour N_1 est inclus dans l'intérieur de A pour N_2.

4.5.2 Normes équivalentes

Proposition 23. Invariance de la topologie de E pour deux normes équivalentes
Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit A une partie de E.

i. L'adhérence de A pour N_1 est égale à l'adhérence de A pour N_2.

ii. L'intérieur de A pour N_1 est égal à l'intérieur de A pour N_2.

iii. A est un ouvert de (E, N_1) si, et seulement, si A est un ouvert de (E, N_2).

iv. A est un fermé de (E, N_1) si, et seulement, si A est un fermé de (E, N_2).