

# Chapitre 7 – Continuité des fonctions vectorielles et compacité

Cadre :  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .

## 1 Fonctions entre espaces vectoriels normés

Dans toute cette section 1,  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés sur lesquels les normes sont notées  $\|\cdot\|_E$ ,  $\|\cdot\|_F$  et  $\|\cdot\|_G$ .

### 1.1 Limite et continuité ponctuelle

#### 1.1.1 Définition générale

**Définition 1.** Limite en un point adhérent à l'ensemble de définition d'une fonction  
Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ , soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et soit  $L \in F$ .  
On dit que  $f$  admet pour limite  $L$  en  $a$  (pour  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ ) et on note  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - L\|_F \leq \varepsilon.$$

Pour qualifier le comportement de  $f$  en  $a$ , il convient de distinguer deux cas.

- Premier cas : si  $a \in A$ , le fait que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$  impose  $L = f(a)$  i.e :  $f(x)$  tend vers  $f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$ , on dit alors que  $f$  est **continue** en  $a$ .
- Second cas : si  $a \in \overline{A} \setminus A$ , le fait que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$  assure que l'on peut **prolonger  $f$  par continuité** en  $a$  en posant  $f(a) = L$ .

#### 1.1.2 Limite quand $\|x\| \rightarrow +\infty$

**Définition 2.** Limite quand  $\|x\|_E \rightarrow +\infty$   
Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  non bornée de  $E$  dans  $F$  et soit  $L \in F$ .  
On dit que  $f$  admet pour limite  $L$  quand  $\|x\|_E \rightarrow +\infty$  et on note  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} (f(x)) = L$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \|x\|_E \geq M \Rightarrow \|f(x) - L\|_F \leq \varepsilon.$$

#### 1.1.3 Cas particulier des réels : extension à $+\infty$ et $-\infty$

**Définition 3.** Limite en  $+\infty$  ou  $-\infty$   
Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  dans  $F$  et soit  $L \in F$ .  
• Si  $A$  n'est pas majoré, on dit que  $f$  admet pour limite  $L$  en  $+\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = L$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - L\|_F \leq \varepsilon.$$

• Si  $A$  n'est pas minoré, on dit que  $f$  admet pour limite  $L$  en  $-\infty$  et on note  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = L$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 \text{ tel que } \forall x \in A, x \leq M \Rightarrow \|f(x) - L\|_F \leq \varepsilon.$$

**Définition 4.** Limite valant  $+\infty$  ou  $-\infty$

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $a \in \overline{A}$ .

• On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = +\infty$  si :

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M.$$

• On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = -\infty$  si :

$$\forall M < 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq M.$$

#### 1.1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

**Proposition 1.**

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ , soit  $a \in \overline{A}$  et soit  $L \in F$ , il y a alors équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- i. la fonction  $f$  admet pour limite  $L$  en  $a$  ;
- ii. pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$ .

#### 1.1.5 Opérations algébriques sur les limites

**Proposition 2.** Linéarité du passage à la limite

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$  et soit  $a \in \overline{A}$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$  et  $\lim_{x \rightarrow a} (g(x)) = L'$  (où  $(L, L') \in F^2$ ) alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lim_{x \rightarrow a} ((\lambda f + \mu g)(x)) = \lambda L + \mu L'.$$

**Proposition 3.** Produit par un scalaire et inverse d'une fonction scalaire

Soit  $\varphi$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  et soit  $a \in \overline{A}$ .

On suppose que  $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)) = \lambda \in \mathbb{K}$ , alors :

- i. Si  $\lambda \neq 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \right) = \frac{1}{\lambda}$  ;
- ii. pour  $f \in \mathcal{F}(A, F)$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L \in F$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x)f(x)) = \lambda L$ .

#### 1.1.6 Composition de limites

**Proposition 4.** Composition de limites

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$  et soit  $a \in \overline{A}$ .

Soit  $g$  une fonction définie d'une partie  $B$  de  $F$  dans  $G$  telle que  $f(A) \subset B$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} (g(y)) = L$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f(x)) = L$

### 1.1.7 Fonction à valeurs dans un espace produit

**Proposition 5.** Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit

Soient  $(F_1, \|\cdot\|_1), \dots, (F_p, \|\cdot\|_p)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et soit  $\|\cdot\|_F$  la norme sur  $F = F_1 \times \dots \times F_p$  produit des normes  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_p$ .

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ , on note :  $\forall x \in A, f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

Soit  $a \in \overline{A}$  et soit  $L = (L_1, \dots, L_p) \in F$ , la fonction  $f$  tend vers  $L$  en  $a$  (pour  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ ) si, et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la fonction  $f_k$  tend vers  $L_k$  en  $a$  (pour  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_k$ ).

## 1.2 Continuité sur une partie

### 1.2.1 Définition et propriétés générales

**Définition 5.** Fonction continue sur une partie

- Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f$  est continue sur  $A$  si elle est continue en chaque point de  $A$ .
- L'ensemble des fonctions de  $A$  dans  $F$  continues sur  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(A, F)$  noté  $\mathcal{C}(A, F)$ .

**Proposition 6.** Continuité d'une fonction produit ou inverse d'une fonction scalaire

Soit  $\varphi$  une fonction définie et continue d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ , alors :

- si  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $A$ , la fonction  $\frac{1}{\varphi}$  est continue sur  $A$  ;
- pour  $f \in \mathcal{C}(A, F)$ , la fonction  $\varphi f$  est continue sur  $A$ .

**Proposition 7.** Composition de fonctions continues

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ .

Soit  $g$  une fonction définie d'une partie  $B$  de  $F$  dans  $G$  telle que  $f(A) \subset B$ .

Si  $f$  est continue sur  $A$  et si  $g$  est continue sur  $B$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $A$ .

**Proposition 8.** Caractérisation d'une fonction continue par sa restriction à une partie dense

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $A$  et coïncident sur une partie dense de  $A$  elles sont alors égales.

### 1.2.2 Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert

**Proposition 9.** Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une fonction continue

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $f$  soit continue sur  $A$ , alors :

- soit  $B$  un fermé de  $F$ ,  $f^{-1}(B)$  est un fermé **relatif** de  $A$  ;
- soit  $B$  un ouvert de  $F$ ,  $f^{-1}(B)$  est un ouvert **relatif** de  $A$ .

### 1.2.3 Applications lipschitziennes et continuité uniforme

**Définition 6.** Application lipschitzienne

Soit  $f$  une application définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$  et soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $f$  est dite  $k$ -lipschitzienne si :  $\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ .

**Proposition 10.** Caractère lipschitzien de la distance à une partie

Soit  $A$  une partie non vide  $E$ , l'application  $f : x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne.

**Définition 7.** Application uniformément continue

Une application  $f$  définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$  est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 11.** Comparaison des « niveaux » de continuité

Soit  $f$  une application définie d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ .

- i. Si  $f$  est lipschitzienne sur  $A$  alors elle est uniformément continue sur  $A$ .
- ii. Si  $f$  est uniformément continue sur  $A$  alors elle est continue sur  $A$ .

### 1.2.4 Continuité des applications linéaires et norme subordonnée

**Proposition 12.** Caractérisation de la continuité d'une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , il y a alors équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

- i.  $f$  est continue en 0 ;
- ii.  $f$  est continue sur  $E$  ;
- iii.  $f$  est lipschitzienne sur  $E$  ;
- iv. il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k \|x\|$  ;

**Définition 8.**

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  continues sur  $E$  forme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$  noté  $\mathcal{L}_C(E, F)$ .

**Définition 9.** Norme sur  $\mathcal{L}_C(E, F)$  subordonnée aux normes sur  $E$  et  $F$ .

On note  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  les normes considérées sur  $E$  et  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$ , on définit la norme de  $u$  subordonnée aux normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  que l'on note  $\|u\|$  par :

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left( \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \right).$$

**Proposition 13.**

Avec les notations de la définition précédente,  $\|u\|$  est une norme sur  $\mathcal{L}_C(E, F)$ .

De plus on a :

- i. pour tout  $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$ ,  $\|u\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} (\|u(x)\|_F)$  ;
- ii. pour tout  $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$  et pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$ .

**Proposition 14.** Cas des endomorphismes

Soit un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , on considère  $\mathcal{L}_C(E)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $E$  (avec la même norme  $\|\cdot\|$  au départ et à l'arrivée).

Pour tout  $\mathcal{L}_C(E)$  on pose  $\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left( \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \right)$ .

Alors :

- i.  $\mathcal{L}_C(E)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  sur laquelle  $\|\cdot\|$  est une norme ;
- ii. pour tout  $u \in \mathcal{L}_C(E)$ ,  $\|u\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} (\|u(x)\|)$
- iii. pour tout  $u \in \mathcal{L}_C(E)$  et pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$  ;
- iv. pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}_C(E)^2$ ,  $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$  (on dit que  $\|\cdot\|$  est sous-multiplicative ou encore que c'est une norme d'algèbre).

### 1.2.5 Continuité des applications multilinéaires

**Proposition 15.** Caractérisation de la continuité d'une application multilinéaire

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$  des espaces vectoriels normés et soit  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E_1 \times \dots \times E_p$  produit des normes  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_p$ .

Soit  $f$  une application  $p$ -linéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans un espace vectoriel  $F$  normé par  $\|\cdot\|_F$ .

Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i.  $f$  est continue sur  $E_1 \times \dots \times E_p$  pour les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_F$  ;
- ii.  $f$  est continue en  $(0, \dots, 0)$  pour les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_F$  ;
- iii. il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que :  $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq k \|x_1\|_1 \cdots \|x_p\|_p$ .

## 2 Compacité

### 2.1 Définition et propriétés topologiques

**Définition 10.** Partie compacte de  $E$ 

Une partie  $A$  de  $E$  est dite compacte (pour  $\|\cdot\|_E$ ) si toute suite d'éléments de  $A$  admet (au moins) une valeur d'adhérence dans  $A$  (pour  $\|\cdot\|_E$ ).

**Proposition 16.**

Toute partie compacte de  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un fermé borné de  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

**Proposition 17.** Partie fermée d'un compact

Toute partie fermée d'un compact de  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un compact de  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

### 2.2 Suite à valeurs dans un compact

**Théorème 1.**

Soit  $A$  un compact de  $(E, \|\cdot\|_E)$  et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ .

Cette suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

## 2.3 Applications continues sur un compact

### 2.3.1 Image d'un compact par une application continue

**Théorème 2.**

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

**Corollaire 1.** Théorème des bornes atteintes

Soit  $f$  une application définie et continue sur un compact  $A$  de  $(E, \|\cdot\|_E)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Cette fonction  $f$  est alors bornée sur  $A$  et de plus elle atteint ses bornes (i.e.  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $A$ ).

### 2.3.2 Théorème de Heine

**Théorème 3.** Théorème de Heine

Toute application continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

## 2.4 Produit de compacts

**Proposition 18.** Produit de compacts

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et soit  $\|\cdot\|_E$  la norme sur  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  produit des normes  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_p$ .

Soient  $A_1, \dots, A_p$  des compacts de  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ , alors  $A_1 \times \dots \times A_p$  est un compact de  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

## 3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

### 3.1 Équivalence des normes

**Lemme 1.** Compacts de  $\mathbb{K}^n$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ 

Dans  $\mathbb{K}^n$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , les parties compactes sont exactement les parties à la fois fermées et bornées.

**Lemme 2.**

Toute norme  $N$  sur  $\mathbb{K}^p$  (où  $p \in \mathbb{N}^*$ ) est équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Théorème 4.** Équivalence des normes en dimension finie

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

### 3.2 Suites coordonnées et fonctions coordonnées relativement à une base

Dans ce 3.2, on suppose que  $E$  est de dimension finie et est muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ .

**Proposition 19.**

Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  et soit  $L = \sum_{k=1}^p L_k e_k$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  se décompose dans  $\mathcal{B}$  comme  $u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$ , et on a alors :

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$  si, et seulement si,  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite  $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L_k$ .

**Proposition 20.**

Soit  $f$  une fonction définie d'une partie  $A$  de  $F$  dans  $E$ .

Pour tout  $x \in A$ ,  $f(x)$  se décompose dans  $\mathcal{B}$  comme  $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)e_k$ , et avec ces notations :

i pour  $a \in \bar{A}$  et  $L = \sum_{k=1}^p L_k e_k$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} (f_k(x)) = L_k$  ;

ii.  $f$  est continue sur  $A$  si, et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_k$  est continue sur  $A$ .

### 3.3 Compacts

**Théorème 5.** Théorème de Bolzano-Weirstrass

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

**Corollaire 2.**

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont exactement les parties à la fois fermées et bornées.

### 3.4 Continuité des applications linéaires, polynomiales et multilinéaires

**Proposition 21.** Continuité des applications linéaires

Si  $E$  est de dimension finie alors toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

**Corollaire 3.**

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  est un fermé de  $E$ .

**Définition 11.** Application polynomiale

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ .

Une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  est dite polynomiale s'il existe une famille presque nulle

$(\lambda_{k_1, \dots, k_p})_{(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p}$  telle que, pour tout  $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k \in E$ ,  $f(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p} \lambda_{k_1, \dots, k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$ .

**Proposition 22.** – Continuité d'une application polynomiale

Toute application polynomiale sur un espace vectoriel de dimension finie est continue.

**Proposition 23.** Continuité d'une application multilinéaire

Soient  $E_1 \times \cdots \times E_p$  des espaces vectoriels de dimension finie.

Toute application  $p$ -linéaire de  $E_1 \times \cdots \times E_p$  dans un espace vectoriel normé  $F$  est continue.

**Corollaire 4.**

Soient  $E_1 \times \cdots \times E_p$  des espaces vectoriels de dimension finie et soit  $f$  une application  $p$ -linéaire de  $E_1 \times \cdots \times E_p$  dans un espace vectoriel normé  $F$ .

Il existe alors  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ ,  $\|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq k \|x_1\| \cdots \|x_p\|$ .

### 3.5 Retour sur la norme subordonnée et extension aux matrices

Soit  $E$  de dimension finie muni d'une norme  $\| \cdot \|$ , on peut définir sur  $\mathcal{L}(E)$  en entier la norme  $\| \cdot \|$  subordonnée à  $\| \cdot \|$  ainsi qu'on l'a vu plus haut, on peut de plus remarquer que l'on a, pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\| \|u\| \| = \max_{x \in E, \|x\|=1} (\|u(x)\|)$ .

On peut définir de la même façon une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

**Définition 12.** Norme subordonnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\| \cdot \|$  une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

On définit alors sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la norme subordonnée à  $\| \cdot \|$  par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \| \| A \| \| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \left( \frac{\| AX \|}{\| X \|} \right).$$

**Proposition 24.**

Avec les notations de la définition précédente :

- i.  $\| \| \cdot \| \|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ;
- ii. pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\| \| A \| \| = \max_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \| X \| = 1} (\| AX \|)$
- iii. pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $\| AX \| \leq \| \| A \| \| \| X \|$  ;
- iv. pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\| \| AB \| \| \leq \| \| A \| \| \| \| B \| \|$  ( $\| \| \cdot \| \|$  est sous-multiplicative).

### 3.6 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans tout ce 3.6,  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé de **dimension finie**.

#### 3.6.1 Définitions et propriétés générales

A partir d'une suite à valeurs dans  $E$  on peut définir une série à valeurs dans  $E$  tout comme on définit une série numérique à partir d'une suite numérique.

Soit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ .

— On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  la somme des  $n + 1$  premiers termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la

suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors appelée série de terme général  $u_n$  et est notée  $\sum u_n$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est appelé somme partielle d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

— Si la série  $\sum u_n$  converge alors sa limite est appelée sa somme totale (ou sa somme) et est notée  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .

— Si la série  $\sum u_n$  converge son terme général tend nécessairement vers 0.

— La nature d'une série ne change pas si on modifie un nombre fini de ses termes généraux, notamment si on la fait débiter à un rang différent.

— Si la série  $\sum u_n$  converge, on peut définir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  appelé

reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ , on a nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (R_n) = 0$ .

— Par phénomène de « télescopage », la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est toujours la même que celle de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

### 3.6.2 Absolue convergence

**Définition 13.** Absolue convergence

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ , la série  $\sum u_n$  est dite absolument convergente si la série  $\sum \|u_n\|$  converge.

**Proposition 25.** Lien entre absolue convergence et convergence

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  (où  $E$  est de dimension finie), si la série  $\sum u_n$  est absolument convergente alors elle est convergente.

### 3.6.3 Exponentielle de matrices ou d'endomorphismes

**Définition 14.** Exponentielle d'endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On appelle exponentielle de  $u$  et on note  $\exp(u)$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

**Définition 15.** Exponentielle de matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), on appelle exponentielle de  $A$  et on note  $\exp(A)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

## 4 Connexité par arcs

Dans toute cette section,  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé.

### 4.1 Chemins continus et composantes connexes par arcs

**Définition 16.** Chemin continu

Soit  $A$  une partie de  $E$  et soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ , on appelle chemin continu de  $x$  à  $y$  dans  $A$  toute application continue  $\varphi$  définie d'un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  dans  $A$  et telle que  $\varphi(a) = x$  et  $\varphi(b) = y$ .

**Définition 17.** Composantes connexes par arcs

Soit  $A$  une partie de  $E$ , on définit la relation binaire  $R$  par :

$$\forall (x, y) \in A^2, \text{ on a } xRy \text{ s'il existe un chemin continu de } x \text{ à } y \text{ dans } A.$$

La relation  $R$  est alors une relation d'équivalence sur  $A$  dont les classes d'équivalences sont appelées composantes connexes par arcs de  $A$ .

### 4.2 Partie connexe par arcs

**Définition 18.** Partie connexe par arcs

Une partie  $A$  de  $E$  est dite connexe par arcs si elle admet une unique composante connexe par arcs (i.e si tous points  $x$  et  $y$  de  $A$  sont reliés par un chemin continu dans  $A$ ).

**Définition 19.** Partie étoilée

Une partie  $A$  de  $E$  est dite étoilée s'il existe un élément  $a$  de  $A$  tel que, pour tout  $x \in A$ , le segment  $[a, x]$  soit inclus dans  $A$ .

**Proposition 26.** Cas de  $\mathbb{R}$

Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont exactement les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

### 4.3 Fonction continue sur un connexe par arcs

**Proposition 27.**

L'image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs.

**Corollaire 5.** Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

Soit  $f$  une fonction définie et continue de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  où  $A$  est une partie connexe par arcs de  $E$ . L'ensemble  $f(A)$  est alors un intervalle de  $\mathbb{R}$  (i.e si  $f$  prend les valeurs  $x$  et  $y$  sur  $A$  alors toutes les valeurs comprises entre  $x$  et  $y$  sont également atteintes par  $f$ ).