Chapitre 8 – Fonctions vectorielles de la variable réelle

Cadre :
— sans autre indication, E, F et G sont des $\mathbb{K}$–espaces vectoriels de dimension finie sur chacun desquels la norme est indifféremment notée $\| \ \|$;
— I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ;
— on rappelle que, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, toute fonction f de I dans E se décompose comme $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ où les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont les applications coordonnées de f relativement à $\mathcal{B}$.

1 Dérivation

1.1 Dérivée ponctuelle

Définition 1. Dérivée en un point
Soit une fonction f de I dans E et soit $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si le terme $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite dans E quand t tend vers a, cette limite est alors appelée dérivée de f en a et est noté $f'(a)$.

Proposition 1. Utilisation des fonctions coordonnées
Soit une fonction f de I dans E dont les fonctions coordonnées relativement à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E sont notées $f_1, \dots, f_n$ et soit $a \in I$, alors :
— la fonction f est dérivable en a si, et seulement si, les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a ;
— si f est dérivable en a, alors $f'(a) = f_1'(a)e_1 + \cdots + f_n'(a)e_n$.

Proposition 2. Développement limité à l'ordre 1
Soit une fonction f de I dans E, soit $a \in I$ et soit $L \in E$.
Cette fonction f est alors dérivable en a avec $f'(a) = L$ si, et seulement si, au voisinage de a, f s'écrit $f(t) = f(a) + (t - a)L + (t - a)\varepsilon(t)$ où $\lim\limits_{t \to a}(\varepsilon(t)) = 0$.

1.2 Dérivée sur un intervalle

Définition 2.
Soit une fonction f de I dans E, on dit que :
— f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I, on définit alors sa fonction dérivée f' sur I qui à tout t de I associe $f'(t)$.
— f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I .

Notations : l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur I à valeurs dans E se note $\mathcal{D}(I, E)$ et l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans E se note $\mathcal{C}^1(I, E)$.

1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

1.3.1 Combinaisons linéaires

Proposition 3. Linéarité de la dérivation
Soient f et g deux fonctions de I dans E et soient deux scalaires λ et μ, alors :
- soit $a \in I$, si f et g sont dérivables en a alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;
- si f et g sont dérivables sur I alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;
- si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

1.3.2 Composition par une application linéaire

Proposition 4.
Soit une fonction f de I dans E, et soit u une application linéaire de E dans F, alors :
- soit $a \in I$, si f est dérivable en a alors $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u\,(f'(a))$;
- si f est dérivable sur I alors $u \circ f$ est dérivable sur I et $(u \circ f)' = u \circ f'$;
- si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

1.3.3 Composition par une application multilinéaire

Proposition 5. Composition par une application bilinéaire
Soit f une fonction de I dans E, soit g fonction de I dans F et soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Soit la fonction $h = B \circ (f, g)$ (i.e. $h : t \in I \mapsto B(f(t), g(t))$) alors :
- soit $a \in I$, si f et g sont dérivables en a alors h est dérivable en a et $h'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$;
- si f et g sont dérivables sur I alors h est dérivable sur I et $h' = B \circ (f', g) + B \circ (f, g')$;
- si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Proposition 6. Composition par une application multilinéaire
Soient $E_1, \dots, E_p$ des K–espaces vectoriels de dimension finie et soit M une application p–linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
Soient $f_1, \dots, f_p$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $E_1, \dots, E_p$.
Soit la fonction $h = M \circ (f_1, \dots, f_p)$ (i.e. $h : t \in I \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$), alors :
- soit $a \in I$, si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables en a alors h est dérivable en a et
$$h'(a) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), f_k'(a), f_{k+1}(a), \dots, f_p(a))\,;$$
- si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables sur I alors h est dérivable sur I et $h' = \sum_{k=1}^{n} M \circ (f_1, \dots, f_{k-1}, f_k', f_{k+1}, \dots, f_p)$;
- si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Corollaire 1. Utilisation du déterminant
Soit A une application de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $t \in I$ on note $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ les colonnes de A.
On définit $\Delta : t \mapsto \det(A(t)) = \begin{vmatrix} C_1(t) & \ldots & C_n(t) \end{vmatrix}$, alors :

— soit $t \in I$, si A est dérivable en t alors Δ est dérivable en t et on a :
$$\Delta'(t) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} C_1(t) & \ldots & C_{k-1}(t) & C_k'(t) & C_{k+1}(t) & \ldots & C_n(t) \end{vmatrix};$$
— si A est dérivables sur I alors Δ est dérivable sur I (et la formule précédente est valable en tout $t \in I$) ;
— si A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors Δ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

1.3.4 Composition avec une fonction scalaire

Proposition 7.
Soit f une fonction de I dans E et soit φ fonction de J dans I (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$), alors :

— soit $a \in J$, si φ est dérivable en a et si f est dérivable en $\varphi(a)$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a).f'(\varphi(a))$;
— si φ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$
— si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

1.4 fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1.4.1 Définition

Définition 3.
Soit f une fonction de I dans E, on définit les dérivées successives de f, sous réserve d'existence, par la récurrence suivante :

— la dérivée 0–ième de f est $f^{(0)} = f$;
— pour tout $k \in \mathbb{N}$, si f admet une dérivée k–ième sur f notée $f^{(k)}$ et si cette fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on définit la dérivée $(k+1)$–ième de f par $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Définition 4.
Soit une fonction f de I dans E, cette fonction est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle admet une dérivée k–ième sur I et si la fonction $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E.

1.4.2 Opérations

Proposition 8. Formule de Leibniz (composition par une application bilinéaire)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E, soit g fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans F et soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.

L'application $B \circ (f, g)$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(B \circ (f,g))^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B \circ \left(f^{(j)}, g^{(k-j)} \right)$.

Proposition 9. Composition avec une application scalaire
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans E et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans I (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$). L'application $f \circ \varphi$ est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

2 Intégration sur un segment

Dans toute cette partie, E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, pour une fonction f de I dans E on note $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées de f relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

La notion d'application continue par morceaux est définie de la même manière que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{C}_m(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans E, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

Une fonction f de I dans E est continue par morceaux sur I si, et seulement si, toutes ses applications coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont.

2.1 Définition

Définition 5.
Soit un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E. On note $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées de f relativement à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.
On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t\, e_1 + \dots + \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\, e_n.$$

2.2 Propriétés

Proposition 10. Linéarité de l'intégrale
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E, alors : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 11. Relation de Chasles
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E, alors : $\forall c \in]a, b[, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 12. Sommes de Riemann
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E, alors :
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Riemann d'ordre n associée à f le vecteur $R_n(f)$ défini par $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$;
- on a alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (R_n(f)) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 13. Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans E, alors :

$$\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

Corollaire 2.
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans E.
On note $\|f\|_\infty = \underset{t\in[a,b]}{sup}(\|f(t)\|)$, on a alors

$$\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

2.3 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1. Théorème fondamental de l'analyse
Soit f une fonction continue de I dans E et soit $a \in I$.
La fonction F_a définie sur I par $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Corollaire 3.
Soit f une fonction continue de I dans E alors f admet des primitives sur I et pour toute primitive F de f sur I on a : $\forall (a,b) \in I^2, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Proposition 14. Inégalité des accroissements finis
Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$ pour laquelle il existe un réel M tel que, pour tout $t \in \mathring{I}, \|f'(t)\| \leq M$.
On a alors : $\forall (a,b) \in I^2, \|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|$.

3 Formules de Taylor

Proposition 15. Formule de Taylor avec reste intégral
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$ et soit $(a,b) \in I^2$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Corollaire 4. Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$, soit $(a,b) \in I^2$ et soit M un majorant de $\|f^{(n+1)}(t)\|$ pour t entre a et b, alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Proposition 16. Formule de Taylor-Young
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,E)$ et soit $a \in I$, la fonction f admet alors un développement limité à l'ordre n en a donné par la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$