

Chapitre 9 – Suites et séries de fonctions

Cadre :

- \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} ;
- sans autre précision, E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie sur chacun desquels la norme est notée $\| \cdot \|$;
- I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} ;
- pour une partie A de E , l'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ des fonctions bornées de A dans F est muni de la norme de la convergence uniforme associée à $\| \cdot \|$ et notée $\| \cdot \|_\infty$, i.e. pour tout $f \in \mathcal{B}(A, F)$,
$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} (\|f(t)\|)$$

1 Suites de fonctions

1.1 Définition et modes de convergence

1.1.1 Définition

Définition 1.

Soit une partie A de E , on appelle suite de fonctions définies de A dans F toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction définie sur A et à valeurs dans F .

1.1.2 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 2. Convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F .

- On dit que cette suite converge simplement sur A si, pour tout x dans A , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A , on peut définir sur A la fonction $f : x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))$, cette fonction f est dite limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la convergence simple.

1.1.3 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3. Convergence uniforme vers une fonction donnée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F et soit une fonction f définie de A dans F .

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si la suite $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A, F)$, i.e. s'il existe un rang n_0 à partir duquel les fonctions $f_n - f$ sont bornées et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|f_n - f\|_\infty) = 0$.

Proposition 1. Traduction à l'aide de quantificateurs

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F et soit une fonction f définie de A dans F .

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon ;$$

Définition 4. Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F .

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A s'il existe une fonction f telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A .

Proposition 2. Lien entre les modes de convergence

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F , si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers cette même fonction f .

Proposition 3. Linéarité de la limite uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies de $A \subset E$ dans F . Si ces suites convergent uniformément vers f et g sur A alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\lambda f + \mu g$ sur A .

1.2 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

1.2.1 Continuité

Proposition 4. Continuité ponctuelle de la limite d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F et soit $a \in A$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur un voisinage de a ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a .

La fonction f est alors continue en a .

Corollaire 1. Utilisation de la convergence uniforme au voisinage d'un point

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur A ;
- ii. pour tout $a \in A$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage de a ;
- iii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A .

La fonction f est alors continue sur A .

Théorème 1. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A .

La fonction f est alors continue sur A .

Corollaire 2. Énoncé pratique dans le cas réel

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle réel I et à valeurs dans F telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment inclus dans I ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I .

La fonction f est alors continue sur I .

1.2.2 Passage à la limite

Théorème 2. Théorème de la double limite

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F et soit $a \in \overline{A} \setminus A$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $L_n \in F$ en a .

La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers une limite L et on a $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$.

1.3 Intégration et dérivation pour des fonctions de la variable réelle

1.3.1 Intégrale sur un segment d'une limite uniforme

Théorème 3. « Primitivation » de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **continues** de I dans F qui converge uniformément vers une fonction f sur tout segment inclus dans I , et soit $a \in I$.

Posons, pour tout $x \in I$, $H(x) = \int_a^x f(t)dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$.

La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers H sur tout segment inclus dans I .

Corollaire 3. Interversion limite et \int_a^b (sur un segment $[a, b]$).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions **continues** de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans F telle que cette suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b f(t)dt$.

1.3.2 Dérivation d'une limite

Théorème 4. Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- ii. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I ;
- iii. la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction φ sur tout segment inclus dans I .

On en déduit alors les points suivants :

- la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = \varphi$;
- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I .

Corollaire 4. Dérivation itérée de la limite d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées (où $p \in \mathbb{N}^*$) :

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I ;
- ii. pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- iii. la suite $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

La limite simple f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de classe \mathcal{C}^p sur I et :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n^{(k)}(x)) = f^{(k)}(x)$$

1.4 Intégrale généralisée d'une suite de fonctions scalaires

Théorème 5. Théorème de convergence dominée : Interversion limite et \int_I

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans \mathbb{K} telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- i. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I ;
- ii. la fonction f est continue par morceaux sur I ;
- iii. il existe une fonction réelle φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Les fonctions f_n et la fonction f sont alors intégrable sur I et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right) = \int_I f(t) dt$.

2 Séries de fonction

2.1 Notations et modes de convergence

2.1.1 Une série de fonctions est une suite de fonctions

Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de $A \subset E$ dans F , on peut définir la série de fonction $\sum u_n$ qui est la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une série de fonctions étant une suite de fonctions, tous les résultats de la partie 1 vont être applicables à une série de fonctions, à commencer par les notions de convergence simple et uniforme.

On dispose de plus d'une notation usuelle de la limite d'une série que l'on va naturellement étendre aux séries de fonction : si la série $\sum u_n$ converge simplement sur A , sa limite (simple) est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Pour une telle série $\sum u_n$ simplement convergente sur A on définit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Enfin, pour une série de fonctions $\sum u_n$ simplement convergente sur A , il est fondamental de comprendre que :

Étudier la convergence uniforme sur A de la série $\sum u_n$ revient à étudier si la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée sur A (au moins à partir d'un certain rang) et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|R_n\|_\infty) = 0$.

2.1.2 Convergence normale

Définition 5. Convergence normale

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies de A dans F , cette série est dite normalement convergente sur A si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. à partir d'un certain rang, les fonctions u_n sont toutes bornées sur A ;
- ii. la série $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition 5. Lien aux autres formes de convergence

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies de A dans F et normalement convergente sur A alors :

- cette série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur A ;
- pour tout $x \in A$, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

2.2 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Une série de fonctions $\sum u_n$ de A dans F est une suite de fonctions (la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$) dont la limite simple (si elle existe) est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Tous les résultats des **1.2** et **1.3** sont donc applicables à la somme d'une série de fonctions.

On notera de plus que les hypothèses demandant une convergence uniforme sont notamment satisfaites pour une convergence normale, laquelle est souvent plus facile à démontrer.

2.2.1 Adaptation des résultats sur les séries de fonctions

Théorème 6. Continuité de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies de $A \subset E$ dans F telle que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. la série $\sum u_n$ converge uniformément sur A ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur A .

La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est alors définie et continue sur A .

Théorème 7. Interversion limite et $\sum_{n=0}^{+\infty}$

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies de $A \subset E$ dans F et soit $a \in \bar{A} \setminus A$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. la série $\sum u_n$ converge uniformément vers une fonction f sur A ;
- ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n admet une limite $L_n \in F$ en a .

La série $\sum L_n$ est alors convergente et on a $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n$.

Les résultats suivants concernent uniquement les fonctions de la variable réelle :

Théorème 8. « Primitivation » de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues de I dans F qui converge uniformément sur tout segment inclus dans I , et soit $a \in I$.

Posons, pour tout $x \in I$, $H(x) = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt$.

La série $\sum v_n$ converge alors uniformément vers H sur tout segment inclus dans I .

Corollaire 5. Intersion $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et \int_a^b (sur un segment $[a, b]$)

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans F qui converge uniformément sur $[a, b]$.

On a alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$.

Théorème 9. Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans F telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- ii. la série $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- iii. la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

On en déduit alors les points suivants :

- la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$;
- la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Corollaire 6. Dérivation itérée de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans F telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées (où $p \in \mathbb{N}^*$:

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe \mathcal{C}^p sur I ;
- ii. pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge simplement sur I ;
- iii. la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est alors de classe \mathcal{C}^p sur I et, pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$.

2.2.2 Intégrale généralisée de la somme d'une série de fonctions

Pour intégrer sur un intervalle quelconque I la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$ (et intervertir \int et \sum), il est envisageable d'appliquer le théorème de convergence dominée à cette série (i.e. à la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$), la difficulté consiste alors à dominer les sommes partielles de cette série, i.e. déterminer une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |\sum_{k=0}^n u_k(t)| \leq \varphi(t)$.

Pour éviter d'avoir à faire cette domination qui est souvent difficile, il existe un théorème spécifique aux séries de fonctions :

Théorème 10. Théorème d'intégration terme à terme

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans \mathbb{K} telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- ii. la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur I ;
- iii. la série $\sum \int_I |u_n(t)| dt$ converge.

La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est alors intégrable sur I et on a $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(t) dt \right)$

3 Approximations uniformes

Dans cette section, $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} .

Proposition 6. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Toute fonction f continue par morceaux de $[a, b]$ dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Théorème 11. Théorème de Weierstrass

Toute fonction f **continue** de $[a, b]$ dans \mathbb{K} est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$.