Chapitre 10 – Intégrales dépendant d'un paramètre

Cadre :
— $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$;
— I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$;
— E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Extension du théorème de convergence dominée

Théorème 1. Interversion limite et intégrale
Soit une fonction f définie de $A \times J$ dans $\mathbb{K}$ où A est une partie de E et soit $a \in \overline{A}$.
On suppose que f vérifie les trois propriétés suivantes :

i. pour tout x dans A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

ii. il existe une fonction L continue par morceaux de J dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $t \in J$, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = L(t)$;

iii. il existe une fonction réelle φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est alors définie sur A, la fonction L est intégrable sur J et on a

$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J L(t)\mathrm{d}t.$$

2 Continuité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 2. Théorème de continuité « sous le signe $\int$ »
Soit une fonction f définie de $A \times J$ dans $\mathbb{K}$ où A est une partie de E.
On suppose que f vérifie les trois propriétés suivantes :

i. pour tout x dans A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

ii. pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

iii. il existe une fonction réelle φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in A \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est alors définie et continue sur A.

Variante plus subtile du théorème :
Les conclusions de ce théorème sont inchangées si on remplace l'hypothèse iii. par l'hypothèse suivante :

iii.bis pour tout a de A, il existe un voisinage V_a de a dans A et une fonction réelle φ_a continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in V_a \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_a(t)$.

Corollaire 1. Cas d'une fonction de la variable réelle
Soit une fonction f définie de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f vérifie les trois propriétés suivantes :

i. pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

ii. pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;

iii. pour tout segment S inclus dans I, il existe une fonction réelle φ_S continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in S \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_S(t)$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est alors définie et continue sur I.

3 Dérivation d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre

3.1 Dérivée première

Théorème 3. Théorème de dérivation « sous le signe $\int$ »
Soit une fonction f définie de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f vérifie les quatre propriétés suivantes :

i. pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

ii. pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

iii. pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto \partial_1 f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;

iv. il existe une fonction réelle φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J, |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est alors définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_J \partial_1 f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Variante plus subtile du théorème :

Les conclusions de ce théorème sont inchangées si on remplace l'hypothèse iv. par l'hypothèse suivante :

iv.bis pour tout segment S inclus dans I, il existe une fonction réelle φ_S continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in S \times J, |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi_S(t)$.

3.2 Dérivée multiple

Théorème 4. Théorème de dérivation multiple « sous le signe $\int$ »
Soit une fonction f définie de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$
On suppose que f vérifie les quatre propriétés suivantes :

- **i.** pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I ;
- **ii.** pour tous $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $x \in I$, la fonction $t \mapsto \partial_1^k f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- **iii.** pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto \partial_1^p f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- **iv.** il existe une fonction réelle φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in I \times J, |\partial_1^p f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est alors définie et de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et on a :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \forall x \in I, F^{(k)}(x) = \int_J \partial_1^k f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Variante plus subtile du théorème :

Les conclusions de ce théorème sont inchangées si on remplace l'hypothèse iv. par l'hypothèse suivante :

- **iv.bis** pour tout segment S inclus dans I, il existe une fonction réelle φ_S continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x,t) \in S \times J, |\partial_1^p f(x,t)| \leq \varphi_S(t)$.