

Chapitre 11 – Ensembles dénombrables et familles sommables

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définition et caractérisation

Définition 1. Ensemble dénombrable

Un ensemble \mathcal{E} est dit dénombrable s'il existe une bijection de \mathcal{E} dans \mathbb{N} .

Proposition 1. Parties dénombrables de \mathbb{N}

Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable.

Corollaire 1. Parties d'un ensemble dénombrable

Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Vocabulaire : on dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable, i.e s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Proposition 2. Caractérisation des ensembles au plus dénombrables

Soit un ensemble \mathcal{E} , il a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i. l'ensemble \mathcal{E} est au plus dénombrable ;
- ii. il existe une injection de \mathcal{E} dans \mathbb{N} ;
- iii. il existe une surjection de \mathbb{N} dans \mathcal{E} .

Corollaire 2.

Les ensemble \mathbb{Z} et \mathbb{N}^2 sont dénombrables.

1.2 Produit et réunion d'ensembles dénombrables

Proposition 3.

Le produit cartésien d'un nombre fini (non nul) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Corollaire 3.

L'ensemble \mathbb{Q} est dénombrable.

Proposition 4.

La réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

1.3 Un ensemble non dénombrable : \mathbb{R}

Proposition 5.

L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

2 Familles sommables de nombres complexes

Dans toute la suite de ce chapitre, I et J sont des ensembles au plus dénombrables.

2.1 Rappel sur les sommes finies et problème des sommes dénombrables

2.1.1 Sommes finies

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{C}^n$, alors :

— la notation $\sum_{k=1}^n a_k$ désigne la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, i.e. la somme de tous les a_k pour k débutant à 1 et finissant à n (il y a un ordre).

— La notation $\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k$ désigne la somme de « tous les a_k » sans spécifier dans quel ordre se fait cette somme, mais puisque l'addition est commutative dans \mathcal{C} , cette somme désigne en fait n'importe laquelle des sommes obtenues en ordonnant les a_1, \dots, a_n puis en faisant la somme de ces nombres dans cet ordre.

— On a donc notamment $\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k = \sum_{k=1}^n a_k$ et plus généralement, pour toute permutation σ de

$$\llbracket 1, n \rrbracket : \sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} .$$

Plus généralement si I est un ensemble fini, en considérant une famille $(a_k)_{k \in I}$, on peut donc définir $\sum_{k \in I} a_k$ qui est la somme obtenue en additionnant « tous les a_k » dans n'importe quel ordre.

Par exemple si $I = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, on peut écrire $\sum_{A \in I} \text{tr}(A) = 7$.

2.1.2 Sommes dénombrables

On considère maintenant une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on souhaite donner un sens à la somme $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$, mais ceci pose plusieurs problèmes :

— si la série $\sum a_n$ diverge, sa somme (totale) $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ n'a pas de sens, on ne peut donc vraisemblablement pas définir $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$;

— si la série $\sum a_n$ converge, sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a un sens et vaut un nombre dans \mathcal{C} , mais rien n'assure qu'en changeant l'ordre des termes dans la sommation, i.e. en considérant une permutation σ de \mathbb{N} , la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\sigma(k)}$ ait également un sens et donne la même valeur.

On comprend d'autant mieux le problème si la somme n'est pas indexée par \mathbb{N} mais par un autre ensemble dénombrable, par exemple $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ ou $\sum_{k \in \mathbb{Q}} a_k$ puisqu'aucun ordre de sommation ne semble alors naturel.

2.2 Somme d'une famille au plus dénombrable de réels positifs

2.2.1 Calculs et ordre dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

On rappelle que dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (aussi noté $[0, +\infty]$) on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, x + (+\infty) = +\infty$ et $+\infty + (+\infty) = +\infty$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \times (+\infty) = +\infty, +\infty \times (+\infty) = +\infty$ et $0 \times (+\infty) = 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, x < +\infty$;
- Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ la borne supérieure de A noté $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$).

2.2.2 Définition

Définition 2. Famille sommable d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors :

- cette famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite sommable si l'ensemble $A = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \text{ partie finie de } I \right\}$ est majoré dans \mathbb{R}_+ ;
- on appelle somme de cette famille et on note $\sum_{i \in I} x_i$ la borne supérieure (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) de l'ensemble A ci-dessus.

Proposition 6. Cas des suites de réels positifs

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est convergente.

De plus, en cas de convergence, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

2.2.3 Propriétés

Proposition 7. Sous-famille d'une famille sommable

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs et soit J une partie de I .

La famille $(x_i)_{i \in J}$ est alors sommable et $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Proposition 8. Comparaison

Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telles que, pour tout $i \in I, x_i \leq y_i$.

On a toujours $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Notamment si $(y_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.

Proposition 9. Combinaison de familles sommables

Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors :

- on a toujours $\sum_{i \in I} \lambda x_i + \mu y_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} y_i$.
- notamment si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables et si λ et μ sont réels alors $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ est sommable.

Proposition 10. Changement d'indexation

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit φ une bijection de J dans I , alors :

- on a toujours $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$ (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$);
- notamment, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ est sommable.

Corollaire 4. Commutativité

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit σ une permutation de I , on a en ce cas :

- on a toujours $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$ (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$);
- notamment, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable.

Théorème 1. Sommation par paquets

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I .

- On a toujours $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$ (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$).
- Notamment, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux propriétés suivantes sont vraies :
 - i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable.
 - ii. La famille $\left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

2.3 Somme d'une famille au plus dénombrable de nombres complexes

2.3.1 Définitions

Définition 3. Famille sommable de nombres complexes

Une famille $(z_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est dite sommable si la famille $(|z_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Lemme 1. Sommabilité d'une famille de nombres réels

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels.

Notons, pour tout $i \in I$, $x_i^+ = \max(0, x_i)$ et $x_i^- = \max(0, -x_i)$.

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

Définition 4. Somme d'une famille sommable de nombres réels

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels.

Notons, pour tout $i \in I$, $x_i^+ = \max(0, x_i)$ et $x_i^- = \max(0, -x_i)$.

On définit alors la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et on note $\sum_{i \in I} x_i$ la valeur suivante :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-.$$

Lemme 2. Sommabilité d'une famille de nombres complexes

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(z_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(\operatorname{Re}(z_k))_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im}(z_k))_{k \in I}$ sont sommables.

Définition 5. Somme d'une famille sommable de nombres complexes

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes.

On définit alors la somme de la famille $(z_k)_{k \in I}$ et on note $\sum_{k \in I} z_k$ la valeur suivante :

$$\sum_{k \in I} z_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(z_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(z_k).$$

Proposition 11. Cas des suites de nombres réels ou complexes

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Cette suite est sommable si, et seulement si, elle est absolument convergente.

De plus, en cas de convergence, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$

2.3.2 Propriétés

Proposition 12.

- Toute sous-famille d'une famille sommable de nombres complexes est sommable.
- Soient $(w_k)_{k \in I}$ et $(z_k)_{k \in I}$ deux familles de nombres complexes telles que, pour tout $k \in I$, $|w_k| \leq |z_k|$. Si $(z_k)_{k \in I}$ est sommable alors $(w_k)_{k \in I}$ est sommable.

Proposition 13. Changement d'indexation

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille de nombres complexes et soit φ une bijection de J dans I , alors :

- la famille $(z_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(z_{\varphi(j)})_{j \in J}$ est sommable ;
- si la famille $(z_k)_{k \in I}$ est sommable alors $\sum_{k \in I} z_k = \sum_{j \in J} z_{\varphi(j)}$.

Corollaire 5. Commutativité

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille de nombres complexes et soit σ une permutation de I , on a en ce cas :

- la famille $(z_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(z_{\sigma(k)})_{k \in I}$ est sommable ;
- si la famille $(z_k)_{k \in I}$ est sommable, alors $\sum_{k \in I} z_k = \sum_{k \in I} z_{\sigma(k)}$.

Proposition 14. Inégalité triangulaire

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes, on a alors $\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \leq \sum_{k \in I} |z_k|$.

Proposition 15. Linéarité de la somme

Soient $(y_k)_{k \in I}$ et $(z_k)_{k \in I}$ deux familles sommables de nombres complexes et soit $(\lambda, \mu) \in \mathcal{C}^2$.

La famille $(\lambda y_k + \mu z_k)_{k \in I}$ est alors sommable et : $\sum_{k \in I} (\lambda y_k + \mu z_k) = \lambda \sum_{k \in I} y_k + \mu \sum_{k \in I} z_k$.

Théorème 2. Sommation par paquets

Soit $(z_k)_{k \in I}$ une famille **sommable** de nombres complexes et soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I , on a alors :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(z_k)_{k \in I_n}$ est sommable ;

ii. la famille $\left(\sum_{k \in I_n} z_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{k \in I} z_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in I_n} z_k \right)$.

2.4 Application aux sommes doubles

Proposition 16. Produit de deux sommes

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ des familles sommables de nombres complexes, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est

alors sommable et on a $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$.

Proposition 17. Somme d'une famille de réels positifs indexée par \mathbb{N}^2

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs.

Cette famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

i. pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} (a_{i,j})$ converge ;

ii. la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right)$ converge.

De plus, si $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable alors $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right)$.

Proposition 18. Intersion des sommations d'une famille indexée par \mathbb{N}^2

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille sommable de nombres complexes, on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \right).$$