

Chapitre 12 – Algèbre bilinéaire

Cadre : sans autre précision, E désigne un espace préhilbertien réel sur lequel le produit scalaire est noté $\langle | \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\| \|$.

1 Rappels et compléments sur la notion d'orthogonalité

1.1 Rappels généraux

- Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $\langle x|y \rangle = 0$;
- deux parties A et B de E sont dites orthogonales si, pour tout $(x, y) \in A \times B$, $\langle x|y \rangle = 0$;
- pour une partie A de E , on note A^\perp l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A (i.e. $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x|y \rangle = 0\}$), A^\perp est le plus grand sous-espace vectoriel de E orthogonal à A ;
- pour toute partie A de E , $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$;
- une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si ses éléments sont orthogonaux deux-à-deux ;
- une famille de vecteurs de E est dite orthonormale si elle est orthogonale et si tous ses éléments sont unitaires ;
- toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre, notamment toute famille orthonormale est libre ;
- si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors F admet des bases orthonormales, lesquelles peuvent notamment être construites à partir d'une base quelconque de F par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1.2 Calculs dans une base orthonormale

On considère un espace euclidien E de dimension n sur lequel le produit scalaire est noté $\langle | \rangle$ et la norme associée est notée $\| \|$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Soient x et y deux vecteurs de E qu'on décompose dans \mathcal{B} : $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$.

On a alors :

— $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \langle x|e_k \rangle$ (et $y_k = \langle y|e_k \rangle$) ;

— $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k (= \sum_{k=1}^n \langle x|e_k \rangle \langle y|e_k \rangle)$;

— $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ (et $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$).

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(y)$, et en notant $\langle | \rangle_c$ et $\| \|_c$ le produit

scalaire canonique et la norme associée sur \mathbb{R}^n (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) cela s'écrit :

— $\langle x|y \rangle = X^T Y = \langle X|Y \rangle_c$;

— $\|x\| = \sqrt{X^T X} = \sqrt{\|X\|_c}$.

On peut résumer cela par la phrase suivante : pour n'importe quel espace euclidien E de dimension n , travailler avec les vecteurs de E pour le produit scalaire sur E revient au même que travailler sur les coordonnées des vecteurs de E (dans une base orthonormale de E) avec le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

1.3 Somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels

Proposition 1.

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E .

Si F_1, \dots, F_p sont orthogonaux deux-à-deux alors ils sont en somme directe ; on dit en ce cas qu'ils sont en somme directe orthogonale et leur somme se note $F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_p$ (ou $\overset{\perp}{\bigoplus}_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} F_k$).

1.4 Projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 2. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On a alors :

- i. $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$;
- ii. $F = (F^\perp)^\perp$;
- iii. si E est dimension finie, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$;
- iv. le projecteur sur F parallèlement à F^\perp est appelé projecteur orthogonal sur F ;
- v. soit p_F le projecteur orthogonal sur F alors, pour tout x de E , la distance de x à F est atteinte en l'unique vecteur $p_F(x)$, i.e
$$\left\{ \begin{array}{l} d(x, F) = \|x - p_F(x)\| \\ \forall y \in F \setminus \{p_F(x)\}, \|x - y\| > \|x - p_F(x)\| \end{array} \right. .$$

Proposition 3. expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormale de F , notons p_F le projecteur orthogonal sur F , on a alors : $\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle e_k$.

2 Matrices orthogonales

Dans toute cette section, n est un élément de \mathbb{N}^* , on identifie \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $\langle | \rangle_n$ et $\| \|_n$ le produit scalaire canonique et la norme associée sur \mathbb{R}^n .

2.1 Définition et déterminant

Remarque préliminaire

Soient deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note les colonnes A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n alors le produit $A^T B$ est la matrice $(\langle A_i | B_j \rangle_n)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

Notamment on a : $A^T A = (\langle A_i | A_j \rangle_n)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

Définition 1.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie $A^T A = I_n$.

Proposition 4.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, la famille de ses vecteurs colonnes forme une base orthonormale pour le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

Proposition 5.

Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut -1 ou 1 .

Vocabulaire :

- une matrice orthogonale de déterminant 1 est dite directe ;
- une matrice orthogonale de déterminant -1 est dite indirecte.

2.2 Groupe orthogonal

Définition 2. Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

- L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n et est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n et est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6.

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2.3 Changement de bases orthonormales

Proposition 7. Caractérisation des matrices orthogonales comme matrices de changement de bases orthonormales

Soit E un espace euclidien de dimension n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E .

Notons $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(\mathcal{F})$, alors \mathcal{F} est une base orthonormale de E si, et seulement si, A est matrice orthogonale.

Définition 3. Matrices orthogonalement semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites orthogonalement semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$ (et donc aussi $B = P^TAP$).

Proposition 8. Lien aux endomorphismes

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables si, et seulement, si elles représentent un même endomorphisme d'un espace euclidien relativement à des bases orthonormales de E .

2.4 Orientation d'un espace euclidien

Définition 4. Orientation d'un espace euclidien

Soit un espace euclidien E .

On dit qu'on oriente E en choisissant une base orthonormale \mathcal{B} de E et en la qualifiant de directe.

En ce cas pour toute autre base orthonormale \mathcal{B}' de E on dit que \mathcal{B}' est directe si $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est de déterminant 1 et qu'elle est indirecte si $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est de déterminant -1 .

Proposition 9. Déterminant sur un espace euclidien orienté

Soit E un espace euclidien orienté.

Le déterminant sur E relativement à une base orthonormale directe \mathcal{B} de E est alors indépendant du choix de cette base \mathcal{B} .

2.5 Étude de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

Proposition 10. Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

- Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
- Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de la forme $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition 11. Produit de matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

On utilise la notation introduite dans la proposition précédente.

Soient deux réels θ et θ' on alors $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

Notamment, le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Proposition 12. morphisme de \mathbb{R} dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

L'application $R : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme surjectif de \mathbb{R} dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 13. isomorphisme de \mathbb{U} dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

L'application $\tilde{R} : u \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u) & -\operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) & \operatorname{Re}(u) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de \mathbb{U} dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

3 Adjoint d'un endomorphisme

Dans toute cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur lequel le produit scalaire est noté $\langle | \rangle$ et la norme associée est notée $\| \|$.

3.1 Isomorphisme de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Proposition 14. Formes linéaires d'un espace euclidien

Pour tout $a \in E$ on note $\varphi(a)$ l'application définie sur E par $\varphi(a) : x \mapsto \langle a|x \rangle$.

L'application φ qui à tout $a \in E$ associe $\varphi(a)$ est alors un isomorphisme de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

3.2 Définition et propriétés

Définition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe alors un unique endomorphisme u^* de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u^*(y) \rangle$$

cet endomorphisme u^* est appelé adjoint de u .

Proposition 15. Linéarité et caractère involutif

L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u^*$ est linéaire ; plus précisément c'est une symétrie de $\mathcal{L}(E)$ (i.e. un automorphisme involutif).

Proposition 16. adjoint d'une composée

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ alors $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Proposition 17. stabilité d'un sous-espace vectoriel

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Le sous-espace vectoriel F est stable par u si, et seulement si, F^\perp est stable par u^* .

3.3 Caractérisation matricielle

Proposition 18. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormale

Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

La matrice de u^* dans \mathcal{B} est alors la transposée de A (i.e. $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$).

4 Isométries vectorielles

Dans toute cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur lequel le produit scalaire est noté $\langle | \rangle$ et la norme associée est notée $\| \|$.

4.1 Définition et propriétés générales

Définition 6.

On appelle isométrie vectorielle de E tout endomorphisme u de E qui conserve la norme, i.e. tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Proposition 19. Cas des symétries

Soit s une symétrie de E alors s est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $\ker(s - Id)$ et $\ker(s + Id)$ sont orthogonaux (on dit alors que s est une symétrie orthogonale).

Vocabulaire : une symétrie orthogonale de E par rapport à un hyperplan de E est appelée une réflexion.

Proposition 20. conservation du produit scalaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est une isométrie vectorielle de E si, et seulement si, u conserve le produit scalaire (i.e. $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$).

Proposition 21. adjoint

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est une isométrie vectorielle de E si, et seulement si, $u^* \circ u = Id$ (i.e. u est inversible et $u^{-1} = u^*$).

Proposition 22. Stabilité d'un sous-espace vectoriel

Soit u une isométrie vectorielle de E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u .

Le sous-espace vectoriel F^\perp est alors stable par u .

4.2 Caractérisation et structure algébrique

Proposition 23.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- i. l'endomorphisme u est une isométrie vectorielle ;
- ii. la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E ;
- iii. la matrice de u dans \mathcal{B} est une matrice orthogonale ;

Corollaire 1.

Le déterminant d'une isométrie vectorielle de E ne peut être égal qu'à 1 ou -1 .

Proposition 24.

- L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ noté $\mathcal{O}(E)$ et appelé groupe orthogonal de E .
- L'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ noté $\mathcal{SO}(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E .

4.3 Cas de la dimension 2**Proposition 25.** Description de $\mathcal{SO}(E)$ avec $\dim(E) = 2$

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien orienté E de dimension 2.

Il existe alors un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute base orthonormale directe \mathcal{B} de E , on ait

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

On dit alors que u est la rotation d'angle θ .

Proposition 26. Description de $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ avec $\dim(E) = 2$

Soit $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien orienté E de dimension 2.

- i. Pour toute base orthonormale \mathcal{B} de E , il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R};$$

- ii. il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

4.4 Réduction**Proposition 27.**

Les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de E ne peuvent être que 1 et -1 .

Lemme 1.

Soit u une isométrie vectorielle de E , il existe alors au moins une droite ou un plan stable par u .

Proposition 28. Réduction : cas général

Soit u une isométrie vectorielle de E , il existe alors une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant d'une des formes suivantes :

- i. un bloc d'ordre 1 de la forme (1) ou (-1) ;
- ii. un bloc d'ordre 2 de la forme $\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

Corollaire 2. Réduction dans $\mathcal{SO}(E)$ où $\dim(E) = 3$.

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ où $\dim(E) = 3$, il existe alors une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice de u est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

On dit alors que u est la rotation de E d'axe $\text{Vect}(e_1)$ et d'angle θ .

5 Endomorphismes autoadjoints

Dans toute cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur lequel le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

5.1 Définition et propriétés générales

Définition 7. Endomorphisme symétrique

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit autoadjoint si $u^* = u$.

Proposition 29.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ noté $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 30. Cas des projecteurs et des symétries

- Un projecteur de E est autoadjoint si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal ;
- une symétrie de E est autoadjointe si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

Proposition 31. Stabilité

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Le sous-espace vectoriel F^\perp est alors stable par u .

5.2 Caractérisation matricielle

Proposition 32.

Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ alors :
 u est autoadjoint si, et seulement si, A est symétrique.

Corollaire 3.

La dimension de $\mathcal{S}(E)$ est $\frac{n(n+1)}{2}$ (où on rappelle que $n = \dim(E)$).

5.3 Théorème spectral

Proposition 33.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux entre eux.

Lemme 2.

Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur \mathbb{R} .

Théorème 1. Théorème spectral – version endomorphisme

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E , il existe alors une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u . Autrement dit, u est diagonalisable dans une base orthonormale (on dit que u est orthogonalement diagonalisable).

Théorème 2. Théorème spectral – version matricielle

Soit A une matrice symétrique réelle, alors A est semblable à une matrice diagonale (i.e. il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ – qui est égale à P^TAP – soit diagonale).

5.4 Endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs

Définition 8. Endomorphisme autoadjoint positif ou défini positif

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E alors u est dit :

- positif si, pour tout $x \in E$, $\langle x|u(x) \rangle \geq 0$;
- défini positif si, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle x|u(x) \rangle > 0$;

Notation :

- l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E se note $\mathcal{S}^+(E)$;
- l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E se note $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Proposition 34. Caractérisation spectrale

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E alors :

- u est positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives (i.e $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$);
- u est défini positif si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives (i.e $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).

5.5 Matrices réelles symétriques positives ou définies positives

Définition 9. Matrice réelle symétrique positive ou définie positive

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, cette matrice est dite :

- positive si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geq 0$;
- définie positive si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$;

Notation :

- l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 35. Lien aux endomorphismes autoadjoints

Soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et soit $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}$ alors :

- u est positif si, et seulement si, A est positive;
- u est défini positif si, et seulement si, A est définie positive.

Proposition 36. Caractérisation spectrale

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors :

- A est positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives (i.e $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$);
- A est définie positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives (i.e $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).

5.6 Un cas particulier intéressant : $u^* \circ u$ ou $A^T A$

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on a toujours :

- $u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$;
- $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$;
- $u = 0 \Leftrightarrow u^* \circ u = 0$;
- $u^* \circ u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow u \in \mathcal{GL}(E)$.

Cela se traduit matriciellement, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par :

- $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- $\ker(A) = \ker(A^T A)$;
- $A = 0 \Leftrightarrow A^T A = 0$;
- $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.