

Chapitre 13 – Séries entières

1 Règle de d'Alembert pour une série à termes réels strictement positifs

Proposition 1. Règle de d'Alembert complète

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on a les règles suivantes :

- i. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge ;
- ii. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Corollaire 1. Règle de d'Alembert usuelle

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, où $L \in \mathbb{R}$, on a les règles suivantes :

- i. si $L > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge ;
- ii. si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

2 Série entière de la variable complexe

2.1 Définition

Définition 1. Série entière

- On appelle série entière (complexe) toute série de fonctions $\sum u_n$ définies sur \mathcal{C} où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de la forme $u_n : z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathcal{C}$;
- une telle série entière est usuellement et abusivement notée $\sum a_n z^n$;
- la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des coefficients de la série entière $\sum a_n z^n$.

2.2 Produit de Cauchy

Proposition 2. Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors le produit de Cauchy de ces séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

2.3 Rayon de convergence

2.3.1 Définition

Proposition 3. Lemme d'Abel

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ et soit $z_0 \in \mathcal{C}^*$.

Si la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors, pour tout $z \in \mathcal{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 2. Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

Proposition 4.

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et soit $z \in \mathcal{C}$, alors :

- si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Corollaire 2.

Une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.

La somme de cette série entière est donc définie et continue sur son disque ouvert de convergence.

2.3.2 Détermination pratique du rayon de convergence

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, il faut déterminer la valeur « frontière » R telle que si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > R$ alors $\sum a_n z^n$ diverge.

On peut notamment pour cela :

1. utiliser la règle de d'Alembert ;
2. utiliser des valeurs remarquables de z :
 - si pour un z donné $\sum a_n z^n$ converge ou $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $R \geq |z|$;
 - si pour un z donné $\sum a_n z^n$ diverge alors $R \leq |z|$;
 - si pour un z donné $\sum a_n z^n$ converge et ne converge pas absolument alors $R = |z|$;
 - si pour un z donné $\sum a_n z^n$ diverge non grossièrement alors $R = |z|$;
 - ...

On a plus spécifiquement un cas classique d'utilisation de la règle de d'Alembert qui n'est valide que si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 5. Règle de d'Alembert spécifique

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Le rayon de convergence de cette série entière est $\frac{1}{L}$ (avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

2.3.3 Opérations algébriques**Proposition 6. Produit par un scalaire non nul**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et soit $\lambda \in \mathcal{C}^*$, le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ est alors égal à R .

Proposition 7. Somme

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b , alors :

- si $R_a \neq R_b$ le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$;
- si $R_a = R_b$ le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à cette valeur commune.

Proposition 8. Produit de Cauchy

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b et soit $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy.

Le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est alors supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

Corollaire 3.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à A est stable par combinaison linéaire et par produit.

2.3.4 Comparaison et produit par «n»**Proposition 9.** Utilisation de O , o et \sim

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b .

i. Si $a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

ii. Si $a_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$ alors $R_a > R_b$.

iii. Si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ alors $R_a = R_b$.

Proposition 10. Produit par «n»

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R , la série entière $\sum n a_n z^n$ admet alors également R pour rayon de convergence.

Corollaire 4. Rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ admet 1 pour rayon de convergence.

2.3.5 Séries entières complexes usuelles**Proposition 11.** Série géométrique

La série entière $\sum z^n$ admet 1 pour rayon de convergence et sa somme est :

$$\forall z \in \mathcal{C} \text{ tel que } |z| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Définition 3. Série exponentielle

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ admet $+\infty$ pour rayon de convergence, pour tout $z \in \mathcal{C}$ sa somme est appelée exponentielle de z et notée $\exp(z)$.

La fonction exponentielle est alors continue sur \mathcal{C} .

3 Série entière de la variable réelle

3.1 Adaptation des résultats sur les séries complexes

On considère une série entière de la variable réelle qu'on note (abusivement) $\sum a_n x^n$, on peut considérer cette série comme la restriction à \mathbb{R} de $\sum a_n z^n$ sur \mathcal{C} .

On définit donc son rayon de convergence R exactement comme pour une série complexe :

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

La série $\sum a_n x^n$ converge (absolument) pour $x \in]-R, R[$, diverge grossièrement pour $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, on ne connaît pas a priori sa nature pour $x = R$ ou $x = -R$.

De plus, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $] -R, R[$.

L'intervalle $] -R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur cet intervalle (au moins) de plus S est continue sur $] -R, R[$.

3.2 Continuité en une borne de l'intervalle de convergence

Théorème 1. Théorème d'Abel

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S .

- Si la série $\sum a_n R^n$ converge alors la fonction S est définie et continue en R .
- Si la série $\sum a_n (-R)^n$ converge alors la fonction S est définie et continue en $-R$.

3.3 Intégration et dérivation de la somme d'une série entière réelle

Proposition 12. Dérivation terme-à-terme

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S , alors :

- la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ admet le même rayon de convergence R ;

- la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Proposition 13. Dérivation k-ième terme-à-terme

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S , alors :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ admet le même rayon de convergence R ;

- la fonction S est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R, R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Proposition 14. Primitivation terme-à-terme

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S , alors :

- la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ admet le même rayon de convergence R ;

- la fonction $T : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est l'unique primitive de S sur $] -R, R[$ s'annulant en 0.

3.4 Développement en série entière

3.4.1 Définition

Définition 4.

Soit $r > 0$ et soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant $] - r, r[$, on dit que f est développable en série entière sur $] - r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence

$R \geq r$ tel que, pour tout $x \in] - r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition 15. Régularité

Soit $r > 0$ et soit une fonction f définie et développable en série entière sur $] - r, r[$.

Cette fonction f est alors de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - r, r[$

3.4.2 Expression des coefficients d'une série entière en fonction de sa somme

Proposition 16. Expression des coefficients en fonction de la somme

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S , alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

Corollaire 5. Identification des coefficients d'une série entière

Soient deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayons de convergence $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

On a alors équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- i. $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in] - r, r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$;
- ii. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

3.4.3 Développement de Taylor

Définition 5. Développement de Taylor

Soit une fonction f définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I contenant 0.

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Taylor de f .

Proposition 17. Unicité du D.S.E.

Soit $r > 0$ et soit une fonction f définie et développable en série entière sur $] - r, r[$.

Ce développement en série entière est unique et est égal à la série de Taylor de f .

Proposition 18. Utilisation du reste intégral

Soit $r > 0$ et soit une fonction f définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I contenant $] - r, r[$.

Cette fonction f est développable en série entière sur $] - r, r[$ si, et seulement si :

$$\forall x \in] - r, r[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right) = 0.$$

3.4.4 Développements usuels

$$1. \forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$2. \forall x \in]-1, 1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$3. \forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$6. \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$7. \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$8. \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$9. \text{ Soit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ alors : } \forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$