Chapitre 14 – Espaces Probabilisés

1 Espace probabilisable

Définition 1. Tribu
Soit un ensemble non vide Ω, on appelle tribu sur Ω tout ensemble τ de parties de Ω vérifiant les trois propriétés suivantes :

i. Ω est élément de τ ;

ii. τ est stable par passage au complémentaire, i.e. $\boxed{\forall A \in \tau, \overline{A} \in \tau}$;

iii. τ est stable par union dénombrable i.e. $\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau}$.

Définition 2. Espace probabilisable
On appelle espace probabilisable tout couple (Ω, τ) où Ω est un ensemble non vide et τ est une tribu sur Ω. Dans un tel espace probabilisable, Ω est appelé univers et les éléments de τ sont appelés événements.

Vocabulaire :
— Un événement qui ne contient qu'un élément est dit élémentaire.
— Deux évènements d'intersection vide sont dits incompatibles.

Proposition 1. Opérations sur les événements
Soit un espace probabilisable (Ω, τ) alors :
— τ est stable par union finie ;
— τ est stable par intersection finie ou dénombrable ;
— pour tous événements A et B, $A \setminus B$ est un événement.

Définition 3. Système complet d'évènements
On appelle système complet d'événement de l'espace probabilisable (Ω, τ) toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i\in I}$ réalisant une partition de Ω (i.e. deux-à-deux disjoints et d'union égale à Ω).

2 Probabilité

2.1 Définition

Définition 4. Probabilité et espace probabilisé
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, τ) toute application P de τ dans $[0, 1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i. $P(\Omega) = 1$;

ii. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles, $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Si P est une probabilité sur (Ω, τ), le triplet (Ω, τ, P) est dit être un espace probabilisé.

2.2 Propriétés

On se place dans un espace probabilisé (Ω, τ, P).

Proposition 2. Complémentaire et union finie

i. $P(\varnothing) = 0$;

ii. pour toute famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements deux-à-deux incompatibles, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$;

iii. pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

iv. pour tous événements A et B tels que $A \subset B$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

v. pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Corollaire 1. Utilisation d'un système complet d'événements
Soit un système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$, on a :

— $\displaystyle\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$;

— pour tout événement B, $\displaystyle\sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = P(B)$.

Proposition 3. Continuités croissantes et décroissantes
Soit un espace probabilisé (Ω, τ, P), on a les propriétés suivantes :

i. pour toute suite croissante d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} (P(A_n))\,;$$

ii. pour toute suite décroissante d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} (P(A_n)).$$

Corollaire 2. Application à une suite quelconque d'événements
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors :

— $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{p \to +\infty} \left(P\left(\bigcup_{n=0}^{p} A_n\right)\right)$;

— $\displaystyle P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{p \to +\infty} \left(P\left(\bigcap_{n=0}^{p} A_n\right)\right)$.

Proposition 4. Inégalité de Boole

— Soit une famille finie d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ alors $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

— Soit une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\displaystyle P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$.

2.3 Événements négligeables et événements presque sûrs

On se place dans un espace probabilisé (Ω, τ, P).

Définition 5.
Un événement A est dit :
- négligeable si $P(A) = 0$;
- presque sûr si $P(A) = 1$.

Proposition 5.
Toute réunion d'une famille au plus dénombrable d'événements négligeable est négligeable.

Définition 6. Système quasi complet d'évènements
On appelle système quasi complet d'événement de l'espace probabilisé (Ω, τ, P) toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ deux-à-deux disjoints et dont l'union est presque sûre.

3 Probabilité discrète sur un univers au plus dénombrable

On suppose ici que l'univers Ω est au plus dénombrable et on se place dans l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Définition 7. Distribution discrète de probabilité
On appelle distribution discrète de probabilité sur Ω toute famille de réels positifs indexée par Ω sommable et de somme égale à 1.

Théorème 1. Caractérisation des probabilités $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
• Soit une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$; posons, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = P(\{\omega\})$.
La famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est alors une distribution discrète de probabilité sur Ω.
• Réciproquement, soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution discrète de probabilité sur Ω.
Il existe alors une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = P(\{\omega\})$.
Cette probabilité est définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega$.

4 Probabilités conditionnelles

Dans toute cette section, on se place dans un espace probabilisé (Ω, τ, P).

4.1 Définition

Théorème 2. Probabilité conditionnelle
Soit A un événement non négligeable, l'application P_A définie sur τ par $\boxed{\forall B \in \tau, P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ est une probabilité sur (Ω, τ), appelée probabilité conditionnelle sachant A.

4.2 Formules de calcul

Proposition 6. Formule des probabilités composées
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a alors : $\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}$.

Proposition 7. Formule des probabilités totales
Soit un système complet (ou quasi complet) d'événements $(A_i)_{i\in I}$ tel que, pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$.
Pour tout événement B on a alors $\boxed{P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}$.

Proposition 8. Formule de Bayes
• Soient A et B deux événements non négligeables, on a alors : $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}}$.
• Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet (ou quasi complet) d'événements non négligeables et soit B un événement non négligeable, on a alors : $\boxed{P_B(A_j) = \dfrac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum_{i\in I} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}}$.

4.3 Indépendance

Définition 8. Couple d'événements indépendants
Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition 9.
Soient deux événements A et B tels que A ne soit pas négligeable.
Ces événement A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.

Définition 9. Famille d'événements indépendants
Les événements d'une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ sont dits indépendants si, pour tout partie finie J de I, on a $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

Proposition 10. Indépendance et manipulation
i. Soient A et B deux événements indépendants ; les événements $\overline{A}$ et B sont alors indépendants.
ii. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants. Soit $i_0 \in I$, et soit J une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$ alors A_{i_0} est indépendant de $\bigcap_{i\in J} A_i$ et de $\bigcup_{i\in J} A_i$.