Chapitre 15 – Variables aléatoires discrètes

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

Définition 1. Variable aléatoire discrète
On appelle variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisable (Ω, τ) toute application X définie de Ω dans un ensemble E telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

i. l'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ;

ii. pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \tau$.

Vocabulaire :
— si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, X est dite réelle ;
— si $X(\Omega)$ est fini, X est dite finie ;
— si $X(\Omega)$ est dénombrable, X est dite dénombrable.

Proposition 1.
Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ) à valeurs dans E, pour toute partie A de E, l'ensemble $X^{-1}(A)$ est un événement noté $[X \in A]$.

Définition 2. Variable aléatoire indicatrice d'un événement.
Soit A un évènement, la fonction notée $\mathbf{1}_A$ définie sur Ω par $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ) dite variable aléatoire indicatrice de A.

1.1.1 Loi de probabilité

Définition 3. Loi de probabilité
Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P), on considère l'application suivante :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

Cette application P_X est alors une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ appelée loi de probabilité de X.

Proposition 2.
Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P), alors :
— la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé système complet d'événements associé à X ;
— on a $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$ (i.e. la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution discrète de probabilités) ;
— la loi de X est donnée par : $\forall A \subset X(\Omega)$, $P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A} P(X = x)$.

Notation : si deux variables aléatoires suivent la même loi on note $X \sim Y$.

Proposition 3. Loi de $Y = f(X)$
Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P) et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Posons $Y = f \circ X$, alors Y est une variable aléatoire discrète sur (Ω, τ, P) notée usuellement $f(X)$ et dont la loi est donnée par la distribution discrète de probabilités suivante :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), P(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

1.1.2 Lois usuelles

Les variables considérées sont définies sur un espace probabilisé (Ω, τ, P).

Définition 4. Loi géométrique
On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique de paramètre p (où $p \in]0, 1[$) et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1-p)^{n-1} \ .$$

Définition 5. Loi de Poisson
On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où $\lambda \in]0, +\infty[$) et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \ .$$

2 Couples et familles de variables aléatoires

2.1 Couple de variables aléatoires

2.1.1 Définition

Proposition 4.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable (Ω, τ).
La fonction notée (X, Y) définie sur Ω par $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ est alors une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 5.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable (Ω, τ).
La famille $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est alors un système complet d'événements appelé système complet d'événements associés au couple (X, Y).

2.1.2 Loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelle

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies l'espace probabilisé (Ω, τ, P).

Définition 6. Loi conjointe
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, on appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple (X, Y).
Cette loi est entièrement déterminée par la distribution discrète de probabilités suivante :

$$\left(P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)\right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Définition 7. Lois marginales
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, les lois de X et de Y sont appelées lois marginales du couple (X, Y).

Proposition 6. Lien entre loi conjointe et lois marginales
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, on a :
- $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$;
- $\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$.

Définition 8. Lois conditionnelles
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, alors :
- pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, P_{[X=x]})$, cette loi est donc donnée par :
  $\forall y \in Y(\Omega), P_{[X=x]}(Y = y) = \dfrac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(X = x)}$
- pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, P_{[Y=y]})$, cette loi est donc donnée par :
  $\forall x \in X(\Omega), P_{[Y=y]}(X = x) = \dfrac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}$

2.1.3 Indépendance

Définition 9.
Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendantes si :
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$.

Notation : si X et Y sont indépendantes on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 7.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E et F.
On suppose que X et Y sont indépendantes, on a alors :
- pour toutes parties A de E et B de F :
  $P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P(X \in A)P(Y \in B)$;
- pour toutes fonctions f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2.2 Vecteurs aléatoires discrets

Toutes les variables considérés sont définies sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P).

2.2.1 Définition et loi

Pour $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on peut définir la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.

La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ est caractérisée par la donnée, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ de la probabilité $P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n])$.

2.2.2 Indépendance

Définition 10. Famille de variables indépendantes
Les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes si :
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), P\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)$.

Proposition 8.
Soient des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ indépendantes à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ alors :

- pour toutes parties $A_1, \dots, A_n$ de $E_1, \dots, E_n$:
  $P\left([X_1 \in A_1] \cap \cdots \cap [X_n \in A_n]\right) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$;
- pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_n$ définies respectivement sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Corollaire 1.
Soient des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ est alors formée de variables indépendantes.

Proposition 9. Lemme des coalitions
Soient des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, soit $m \in [\![1, n-1]\!]$ et soient des fonctions f et g définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.
Les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont alors indépendantes.

2.2.3 Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 11.
On appelle suite de variables aléatoires discrètes indépendantes toute suite de variables aléatoires discrètes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_0, \dots, X_N$ soient indépendantes.

Théorème 1.
Soit une suite $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de lois de probabilités discrètes, il existe alors un espace probabilisé (Ω, τ, P) et une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur cet espace telle que :
$\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i \sim \mathcal{L}_i$.

3 Espérance, variance et covariance

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P).

3.1 Espérance

3.1.1 Définition

Définition 12. Espérance d'une variable positive
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
On définit l'espérance de X, notée $E(X)$, comme la somme (définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) de la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, i.e. $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$

Définition 13. Espérance d'une variable complexe
Soit X une variable aléatoire discrète complexe, alors :
- on dit que X est d'espérance finie si la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ;
- si X est d'espérance finie, on définit l'espérance de X, notée $E(X)$, par :
  $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Notation : si X est une variable aléatoire complexe d'espérance finie on note $X \in \mathcal{L}^1$.

Vocabulaire : une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

Proposition 10. Cas des variables à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on a alors $E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} P(X \geq k)$.

Proposition 11. Espérance pour les lois usuelles
- Une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ est d'espérance finie donnée par $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est d'espérance finie donnée par $E(X) = \lambda$.

3.1.2 Théorème de transfert

Théorème 2. Théorème de transfert
Soit X une variable aléatoire discrète et soit f une fonction définie de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, alors :
- la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ;
- si $f(X)$ est d'espérance finie, on a $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.

3.1.3 Propriétés de l'espérance

Théorème 3. Linéarité de l'espérance
Soient deux variables aléatoires discrètes réelles X et Y d'espérances finies et soit deux réels λ et μ, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.

Proposition 12. Comparaison
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles telles que $|X| \leq Y$.
Si Y est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.

Proposition 13. Positivité
Soit X une variable aléatoire discrète positive, son espérance est alors positive.
De plus $E(X) = 0$ si, et seulement si, X est presque sûrement nulle.

Corollaire 2. Croissance
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies telles que $X \leq Y$, on a alors $E(X) \leq E(Y)$.

Proposition 14. Espérance d'un produit
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles, alors :
- la variable aléatoire XY est d'espérance finie si, et seulement si, la famille $(xyP([X=x]\cap[Y=y]))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable.
- si XY est d'espérance finie on a $E(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y])$.

Corollaire 3. Espérance du produit de variables indépendantes
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et d'espérances finies.
La variable aléatoire XY est alors d'espérance finie et on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proposition 15. Inégalité de Markov
Soit X une variable aléatoire discrète **positive** d'espérance finie, on a alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha} .$$

3.2 Variance

3.2.1 Variables de carrés d'espérances finies et inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition 16.
Soit X une variable aléatoire discrète complexe.
Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.

Notation : si X est une variable aléatoire discrète complexe telle que X^2 est d'espérance finie on note $X \in \mathcal{L}^2$; on a donc : $X \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1$.

Proposition 17.
Soient X et Y éléments de $\mathcal{L}^2$ alors la variable XY est dans $\mathcal{L}^1$ et on a :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2) .$$

Corollaire 4.
L'espace $\mathcal{L}^2$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}^1$.

3.2.2 Variance et écart-type

Définition 14. Variance et écart-type
Soit X élément de $\mathcal{L}^2$, on définit alors :
- la variance de X, notée $V(X)$, par : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$;
- l'écart-type de X, notée $\sigma(X)$, par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Vocabulaire : une variable aléatoire admettant une variance égale à 1 est dite réduite.

Proposition 18. Formule de Kœnig-Huyghens
Soit X élément de $\mathcal{L}^2$, on a alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 19. Variable de variance nulle
Soit X élément de $\mathcal{L}^2$.
La variance de X est nulle si, et seulement si, X est presque sûrement constante.

Proposition 20. Variance pour les lois usuelles

- Une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{G}(p)$ admet une variance donnée par $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ admet une variance donnée par $V(X) = \lambda$.

Proposition 21. Variance de $aX+b$
Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant une variance et soient deux réels a et b, alors la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance et on a $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Corollaire 5. variable réduite et variable centrée réduite
Soit X dans $\mathcal{L}^2$ de variance non nulle, alors :

- la variable $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est de variance égale à 1, elle est dite variable réduite associée à X ;
- la variable $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est d'espérance nulle et de variance égale à 1, elle est dite variable centrée réduite associée à X.

Proposition 22. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X dans $\mathcal{L}^2$, on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} .$$

3.2.3 Covariance

Définition 15. Covariance de deux variables aléatoires
Soient X et Y dans $\mathcal{L}^2$, la variable $(X-E(X))(Y-EY)$ est alors d'espérance finie et on définit la covariance de X et Y, notée $\text{Cov}\,(X,Y)$, par : $\text{Cov}\,(X,Y) = E((X-E(X))(Y-EY))$.

Proposition 23. Formule de Kœnig-Huyghens
Soient X et Y dans $\mathcal{L}^2$ on a alors : $\text{Cov}\,(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Proposition 24.
La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{L}^2$.
Par inégalité de Cauchy-Scwarz on a donc, pour tout X et Y dans $\mathcal{L}^2$: $\text{Cov}\,(X,Y)^2 \leq V(X)V(Y)$.

Corollaire 6. Covariance de variables aléatoires indépendantes
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de $\mathcal{L}^1$, ces variables aléatoires admettent alors une covariance nulle.

Proposition 25. Variance d'une somme de variables aléatoires
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires dans $\mathcal{L}^2$, on a alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}\,(X_i, X_j) .$$

Corollaire 7. Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires non corrélées dans $\mathcal{L}^2$, on a alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) .$$

3.2.4 Loi faible des grands nombres

Proposition 26. Loi faible des grands nombres
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans $\mathcal{L}^2$ suivant toute la même loi.
Notons m l'espérance commune à ces variables et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0\ .$$

4 Fonctions génératrices

Toutes les variables aléatoires considérées dans cette section sont définies sur l'espace probabilisé (Ω, τ, P) et sont **à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

4.1 Définition

Définition 16.
La fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète entière X, notée G_X, est la somme de la série entière réelle $\sum P(X=n)t^n$, i.e. $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

Proposition 27.
Soit X une variable aléatoire discrète entière de fonction génératrice G_X, alors :
- le rayon de convergence R de la série entière $\sum P(X=n)t^n$ est supérieur ou égal à 1 ;
- $\forall t \in]-R, R[, G_X(t) = E(t^X)$;
- la fonction G_X est définie et continue au moins sur $[-1, 1]$ (même si $R = 1$).

Proposition 28. Obtention de la loi à partir de la fonction génératrice
Soit X une variable aléatoire discrète entière de fonction génératrice G_X, on a alors :
$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

4.2 Lien à l'espérance et à la variance

Proposition 29. Espérance
Soit X une variable aléatoire discrète entière de fonction génératrice G_X, alors :
- la variable X est d'espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est dérivable en 1 ;
- si X est d'espérance finie alors $E(X) = G_X{}'(1)$.

Proposition 30. Variance
Soit X une variable aléatoire discrète entière de fonction génératrice G_X, alors :
- la variable X est dans $\mathcal{L}^2$ si, et seulement si, la fonction G_X est deux fois dérivable en 1 ;
- si X est dans $\mathcal{L}^2$ alors $E(X^2) = G_X{}''(1) + G_X{}'(1)$.

4.3 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition 31.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes entières indépendantes de fonctions génératrices $G_{X_1}, \ldots, G_{X_n}$. La fonction génératrice de $S = X_1 + \cdots + X_n$ est alors $G_S = G_{X_1} \cdots G_{X_n}$.