

# Chapitre 16 – Équations différentielles linéaires

Cadre : Sans autre précision,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

## 1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### 1.1 Définitions

**Définition 1.**

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 (sous forme résolue) toute équation  $(E)$  de la forme suivante :

$$(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où :

- l'inconnue  $x$  est une fonction dérivable de  $I$  dans  $E$  ;
- la fonction  $a$  est une fonction continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  ;
- la fonction  $b$  est une fonction continue de  $I$  dans  $E$ .

**Définition 2.**

Soit l'équation différentielle  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ , on appelle équation homogène associée à  $(E)$  l'équation  $(E_0) : x'(t) = a(t)x(t)$ .

### 1.2 Traduction en terme de système linéaire

On considère l'équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on associe à  $x$ ,  $a$  et  $b$  leurs matrices dans  $\mathcal{B}$  notées  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

L'équation  $(E)$  s'écrit alors matriciellement  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$  ce qui se développe en le système suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n'(t) &= a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

### 1.3 Structure des espaces de solution

**Proposition 1.**

On considère l'équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  et son équation homogène associée  $(E_0)$ . Notons  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_0$  les ensembles de solutions de ces équations, alors :

- $\mathcal{S}_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  ;
- si  $f_p$  est une solution « particulière » de  $(E)$  alors  $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$ , donné par :  $\mathcal{S} = \{f_p\} + \mathcal{S}_0$ .

**Proposition 2.** Principe de superposition des solutions

On considère l'équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ .

Soient  $b_1$  et  $b_2$  dans  $\mathcal{C}(I, E)$  telles que  $b = b_1 + b_2$ .

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont solutions des équations  $x'(t) = a(t)x(t) + b_1(t)$  et  $x'(t) = a(t)x(t) + b_2(t)$  alors  $f = f_1 + f_2$  est solution de  $(E)$ .

#### 1.4 Problème de Cauchy et Théorème de Cauchy

**Définition 3.** Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy la recherche des solutions  $x$  d'une équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  vérifiant de plus une condition initiale du type  $x(t_0) = x_0$  où on a fixé  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ .

Un tel problème de Cauchy se note usuellement : 
$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
.

**Proposition 3.** Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy 
$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
.

Une application  $f \in \mathcal{C}(I, E)$  est alors solution de ce problème de Cauchy si, et seulement si, elle vérifie la relation suivante :

$$\forall t \in I, f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u) (f(u)) du + \int_{t_0}^t b(u) du$$

**Théorème 1.** Théorème de Cauchy linéaire

Soit l'équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  (où les fonctions  $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$ ) et soient  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ .

Le problème de Cauchy 
$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 admet alors une unique solution sur  $I$ .

**Corollaire 1.** On considère  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  et  $(E_0) : x' = a(t)x(t)$  dont on note  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_0$  les espaces de solutions.

Soit  $t_0 \in I$ , on définit les deux fonctions suivantes :

$$\alpha_{t_0} : \mathcal{S} \rightarrow E \quad \text{et} \quad \beta_{t_0} : \mathcal{S}_0 \rightarrow E \\ \varphi \mapsto \varphi(t_0) \quad \text{et} \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

On a alors les résultats suivants :

- i. les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont bijectives ;
- ii. la fonction  $\beta$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{S}_0$  dans  $(E)$  ;
- iii.  $\dim(\mathcal{S}_0) = \dim(E)$ .

#### 1.5 Résolution pratique d'une équation à coefficients constants

L'équation  $(E) : x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$  est dite à coefficients constants si la fonction  $a$  est constante, on écrira sans ce cas  $(E) : x'(t) = a(x(t)) + b(t)$  .

En passant au système associé dans une base de  $E$ , avec les mêmes notations qu'au 1.2, on obtient le système matriciel :  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  où  $A$  est une matrice constante.

Notamment l'équation homogène associée s'écrit matriciellement  $X' = AX$ , que l'on résout alors grâce à une réduction de la matrice  $A$  qui permet d'obtenir un système plus simple via un changement

d'inconnue.

Supposons en effet que  $\Delta = P^{-1}AP$  soit diagonale ou triangulaire, on peut écrire, en posant  $Y = P^{-1}X$  :

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = P^{-1}APP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = \Delta Y(t)$$

On résout donc l'équation  $Y'(t) = \Delta Y(t)$  puis on en déduit  $X$  solution de  $X'(t) = AX(t)$  à l'aide de la relation  $X = PY$ .

## 2 Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

### 2.1 Cas des endomorphismes

**Définition 4.** Rappel : exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle exponentielle de  $u$  et on note  $\exp(u)$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

**Proposition 4.**

L'application  $\exp$  est continue sur  $\mathcal{L}(E)$ .

**Proposition 5.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors l'application  $\Psi : t \mapsto \exp(tu)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Psi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u.$$

### 2.2 Cas des matrices

**Définition 5.** Rappel : exponentielle d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle exponentielle de  $A$  et on note  $\exp(A)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

**Proposition 6.** Exponentielle d'une matrice diagonale

Soit  $A$  une matrice diagonale qu'on note  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On a alors  $\exp(A) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$ .

**Proposition 7.** Exponentielle d'une matrice triangulaire

Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

La matrice  $\exp(T)$  est alors une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux  $(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$ .

**Proposition 8.** Continuité

L'application  $\exp$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition 9.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors l'application  $\Psi : t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Psi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

## 2.3 Spectre

**Proposition 10.** Exponentielles de matrices semblables

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , si  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\exp(A)$  et  $\exp(B)$  sont semblables.

**Proposition 11.** Spectre de l'exponentielle d'une matrice

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , le spectre de  $\exp(A)$  est exactement  $\{\exp(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

## 2.4 Lien aux systèmes linéaires à coefficients constants

**Proposition 12.**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in E$ , l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy  $\begin{cases} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  est la fonction  $\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$ .

**Proposition 13.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy  $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$  est la fonction  $\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$ .

## 2.5 Exponentielle de la somme de deux endomorphismes (ou matrices) qui commutent

**Proposition 14.**

Soient  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ , alors :

$$\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(u + v) = \exp(v) \circ \exp(u)$$

**Proposition 15.**

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tels que  $AB = BA$ , alors :

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B) = \exp(B) \exp(A)$$

# 3 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n$

## 3.1 Définition et structure des espaces de solutions

**Définition 6.**

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  (sous forme résolue) toute équation  $(E)$  de la forme :

$$(E) : x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) = b(t)$$

où :

- l'inconnue  $x$  est une fonction  $n$  fois dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  ;
- les fonctions  $a_0, \dots, a_{n-1}$  et  $b$  sont continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

L'équation  $(E_0) : x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) = 0$  est appelée équation homogène associée à  $(E)$ .

**Proposition 16.**

On considère  $(E)$  et  $(E_0)$  telles que dans la définition précédente, dont on note  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_0$  les ensembles de solutions, alors :

- $\mathcal{S}_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ ;
- si  $\varphi_p$  est une solution « particulière » de  $(E)$  alors  $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ , donné par :  $\mathcal{S} = \{\varphi_p\} + \mathcal{S}_0$ .

**3.2 Lien aux systèmes linéaires d'ordre 1 et résultats associés**

On considère  $(E) : x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) = b(t)$ .

A toute application  $\varphi$  de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ , on associe l'application  $V_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ , on a donc  $V_\varphi \in$

$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$  et :

$\varphi$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si, et seulement si,  $V_\varphi$  est solution sur  $I$  du système  $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$  où on a posé :

$$A : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

On déduit alors de l'étude des systèmes d'ordre 1 les résultats correspondants pour les équations scalaires d'ordre  $n$ .

**Définition 7.** Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy la recherche des solutions  $x$  de l'équation  $(E) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b$  vérifiant de plus une condition initiale du type  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x^{(k)}(t_0) = x_k$  où on a fixé  $t_0 \in I$  et  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ .

**Théorème 2.** Théorème de Cauchy linéaire

Pour tous  $t_0 \in I$  et  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , le problème de Cauchy  $\begin{cases} x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = b \\ x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$  admet une unique solution sur  $I$ .

**Corollaire 2.** Dimension de  $\mathcal{S}_0$ 

On considère  $(E_0) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$  dont on note  $\mathcal{S}_0$  l'espace de solutions, on pose  $t_0 \in I$  et on

définit la fonction suivante :  $\alpha_{t_0} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$   
 $\varphi \mapsto (\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0))$

Cette fonction  $\alpha_{t_0}$  est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{S}_0$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

On a donc  $\dim(\mathcal{S}_0) = n$ .

### 3.3 Équations d'ordre 2

On s'intéresse dans toute la fin du chapitre à une équation scalaire d'ordre 2 du type  $(E) : x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0x(t) = b(t)$  et à son équation homogène associée  $(E_0)$ , les fonctions  $a_0, a_1$  et  $b$  étant continues sur  $I$ . Tous les résultats précédents sont applicables, on a notamment  $\dim(\mathcal{S}_0) = 2$ .

#### 3.3.1 Wronskien

**Définition 8.** Wronskien

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ , on appelle Wronskien de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et on note  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  la fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  par :

$$\forall t \in I, W_{\varphi_1, \varphi_2}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} (= \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t))$$

**Proposition 17.** Wronskien d'un couple de solutions de l'équation homogène

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  dont on note  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  le Wronskien, les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- i.  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$  ;
- ii.  $\exists t \in I$  tel que  $W_{\varphi_1, \varphi_2}(t) \neq 0$  ;
- ii.  $\forall t \in I, W_{\varphi_1, \varphi_2}(t) \neq 0$ .

**Proposition 18.** (H.P. mais utile) Équation différentielle vérifiée par le Wronskien

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  alors leur Wronskien  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  le Wronskien est solution sur  $I$  de l'équation différentielle  $x'(t) + a_1(t)x(t) = 0$ .

#### 3.3.2 Méthode de variation des constantes

**Proposition 19.**

Soit  $(\varphi_1, \varphi_2)$  une base de  $\mathcal{S}_0$ , les solutions de  $(E)$  sont alors les fonctions  $\varphi$  de la forme  $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$  où les fonctions dérivables  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifient le système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2'\varphi_2 = 0 \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' = b \end{cases} .$$

#### 3.3.3 Solutions développables en série entière

Une possibilité pour déterminer certaines solutions d'une équation scalaire est de les chercher sous forme de somme d'une série entière.

#### 3.3.4 Méthode de Lagrange (non explicitement au programme mais simple et utile)

Si on dispose d'une solution  $\varphi$  de  $(E_0)$  qui ne s'annule pas sur  $I$ , il est intéressant de chercher la solution générale de  $(E_0)$  (ou directement  $(E)$ ) sous la forme  $y(t) = z(t)\varphi(t)$  (ce qui revient donc à poser une nouvelle inconnue  $z = \frac{y}{\varphi}$ ).

En effet l'équation obtenue ne fera apparaître que  $z''$  et  $z'$  mais pas  $z$ , on se ramène donc à résoudre une équation du premier ordre en posant  $u = z'$ .