Chapitre 17 – Calcul différentiel

Cadre : sans autre précision, E, F, G et H désignent des $\mathbb{R}$–espaces vectoriels normés de dimensions finies ; U désigne un ouvert de E.

1 Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

1.1 Fonctions d'une variable vectorielle et fonctions de plusieurs variables

Soit une fonction f définie de U dans F, posons une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E, l'application Ψ qui à tout x de E associe ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$, on peut donc définir l'application $f_{\mathcal{B}} = f \circ \Psi^{-1}$ sur l'ouvert $\Psi(U)$ de $\mathbb{R}^n$, cette application vérifie ainsi : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \Psi(U), f_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right)$.

On dit que $f_{\mathcal{B}}$ est une fonction de n variables réelles qui représente f relativement à la base $\mathcal{B}$.

L'étude des fonctions d'une variable vectorielle dans un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n peut ainsi se ramener à l'étude des fonctions de n variables réelles.

Si on travaille dans une base fixée, on identifiera fréquemment f et $f_{\mathcal{B}}$, notamment pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

1.2 Dérivée selon un vecteur

Définition 1. Dérivée selon un vecteur
Soit une fonction f définie de U dans F, soit a dans U et soit un vecteur v de E.
Si la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0 alors sa dérivée en 0 est appelé dérivée de f en a selon le vecteur v et est notée $D_v f(a)$.

Proposition 1. Utilisation des fonctions coordonnées relativement à une base de l'espace d'arrivée
Soit une base $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ de F et soit une application f de U dans F dont on note $(f_1, \ldots, f_p)$ les applications coordonnées relativement à $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ (on a donc $f = \sum_{j=1}^{p} f_j \varepsilon_j$).
Soit a dans U et soit un vecteur v de E alors f admet une dérivée en a selon le vecteur v si, et seulement si, toutes les fonctions f_j pour $j \in [\![1, p]\!]$ admettent des dérivées en a selon le vecteur v ; si c'est le cas on a $D_v f(a) = \sum_{j=1}^{p} D_v f_j(a) \varepsilon_j$.

1.3 Applications partielles et dérivées partielles

Définition 2. Application partielle et dérivée partielle d'une fonction de n variables réelles
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans F et soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on appelle k-ième application partielle de f en a l'application de la variable réelle définie au voisinage de 0 par $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$.
Si cette k-ième application partielle de f en a est dérivable en 0, cette dérivée en 0 est appelée k-ième dérivée partielle de f en a et se note $\partial_k f(a)$.

Définition 3. Application partielle et dérivée partielle
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de E et à valeurs dans F, soit une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et soit $f_{\mathcal{B}}$ l'application de n variables qui représente f dans $\mathcal{B}$.
Soit $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ dans U et soit $k \in [\![1, n]\!]$.
La k-ième application partielle de $f_{\mathcal{B}}$ en $(a_1, \ldots, a_n)$ est appelée k-ième application partielle de f en a dans $\mathcal{B}$, si cette application est dérivable en a_k alors $\partial_k f_{\mathcal{B}}(a)$ est appelée k-ième dérivée partielle de f en a dans $\mathcal{B}$.

Proposition 2. Utilisation des fonctions coordonnées relativement à une base de l'espace d'arrivée
Soit une base $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ de F et soit une application f de U dans F dont on note $(f_1, \ldots, f_p)$ les applications coordonnées relativement à $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ (on a donc $f = \sum_{j=1}^{p} f_j \varepsilon_j$).
Soit a dans U et soit $k \in [\![1, n]\!]$ alors f admet une dérivée partielle k-ième en a si, et seulement si, toutes les fonctions f_j pour $j \in [\![1, p]\!]$ admettent des dérivées partielle k-ième en a ; si c'est le cas on a $\partial_k f(a) = \sum_{j=1}^{p} \partial_k f_j(a) \varepsilon_j$.

2 Différentielle

2.1 Définition

Définition 4. Notation o
Soient f et g deux fonctions définies sur U et à valeurs dans F et G, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de $a \in U$ et on note $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ (ou plus simplement $f = \underset{a}{o}(g)$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq r \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|.$$

Lemme 1.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour h dans E au voisinage de 0, $u(h) = o(h)$, alors u est nulle.

Définition 5. Fonction différentiable
Soit une fonction f de U dans F, alors :
- on dit que f est différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que pour h dans E au voisinage de 0 on ait : $f(a + h) = f(a) + u(h) + \underset{h \to 0}{o}(h)$;
- on dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Définition 6. Différentielle en un point
Soit une fonction f de U dans F et soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a.
On appelle différentielle de f en a et on note $\mathrm{d}f(a)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que, pour h dans E au voisinage de 0, on ait : $f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(h)$.

Définition 7. Application différentielle
Soit une fonction f de U dans F différentiable sur U, on appelle différentielle de f et on note df l'application de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui à tout $a \in U$ associe $\mathrm{d}f(a)$;

Proposition 3. Deux cas particuliers
• Une application constante de U dans F est différentiable sur U et sa différentielle est nulle sur U.
• Une application linéaire de E dans F est différentiable sur E et sa différentielle en tout point est égale à elle même.

2.2 Propriétés

Proposition 4. Lien à la continuité
• Toute application de U dans F différentiable en $a \in U$ est continue en a.
• Toute application de U dans F différentiable sur U est continue sur U.

Proposition 5. Lien aux dérivées selon un vecteur et aux dérivées partielles
Soit f une application de U dans F différentiable en $a \in U$, cette fonction f admet alors en a des dérivées selon tous les vecteurs de E et de plus : $\forall v \in E, D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$.
Notamment, pour une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E, $f_{\mathcal{B}}$ admet des dérivées partielles selon toutes ses variables en a et : $\forall k \in [\![1, n]\!], \partial_k f_{\mathcal{B}}(a) = \mathrm{d}f(a)(e_k)$.

2.3 Utilisation de bases

Proposition 6. Utilisation des fonctions coordonnées relativement à une base de l'espace d'arrivée
Soit une base $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ de F et soit une application f de U dans F dont on note $(f_1, \dots, f_p)$ les applications coordonnées relativement à $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ (on a donc $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} f_j \varepsilon_j$).
Soit $a \in U$, f est différentiable en a si, et seulement si, toutes les fonctions f_j pour $j \in [\![1, p]\!]$ sont différentiables en a ; si c'est le cas on a, pour tout $h \in E$, $df(a)(h) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} df_j(a)(h)\varepsilon_j$.

Proposition 7. Expression de la différentielle relativement à une base de l'espace de départ
Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et soit une application f de U dans F différentiable en $a \in U$.
On a alors : $\forall h = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k e_k$, $\mathrm{d}f(a)(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f_{\mathcal{B}}(a)$.

Proposition 8. Matrice de la différentielle dans un couple de bases
Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ des bases de E et F.
Soit f une application de U dans F dont on note $f_1, .., f_p$ les applications composantes dans $\mathcal{B}_F$.
Si f différentiable en $a \in U$, la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est $(\partial_j f_i(a))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Définition 8. Matrice jacobienne
Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et si f une application de U dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$, la matrice canoniquement associée à $\mathrm{d}f(a)$ est appelée matrice jacobienne de f en a et est notée $Jf(a)$.

2.4 Gradient d'une application à valeurs réelles sur un espace euclidien

Définition 9. Gradient
Supposons que E est muni d'un produit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$.
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$.
Si f est différentiable en a on appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de E tel que : $\forall x \in E, \mathrm{d}f(a)(x) = \langle \nabla f(a) | x \rangle$.

Proposition 9. Expression du gradient dans une base orthonormale
Supposons que E est muni d'un produit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$ et d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$, les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont alors :$(\partial_1 f_{\mathcal{B}}(a), \ldots, \partial_n f_{\mathcal{B}}(a))$.

3 Opérations sur les fonctions différentiables

3.1 Linéarité

Proposition 10.
Soient f et g deux applications de U dans F et soient deux réels λ et μ.

i. Soit $a \in U$, si f et g sont différentiables en a alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$.

ii. Si f et g sont différentiables sur U alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$.

3.2 Application multilinéaire

Proposition 11.
Soit f une application de U dans F et soit g une application de U dans G.
Soit B une application bilinéaire sur $F \times G$ (à valeurs dans H).

i. Soit $a \in U$, si f et g sont différentiables en a alors $B(f, g)$ est différentiable en a et $\forall h \in E, \mathrm{d}B(f, g)(a)(h) = B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h))$.

ii. Si f et g sont différentiables sur U alors $B(f, g)$ est différentiable sur U.

Proposition 12.
Soient $f_1, \ldots, f_p$ des application de U dans $F_1, \ldots, F_p$ ($\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies).
Soit M une application p–linéaire sur $F_1 \times \cdots \times F_p$ (à valeurs dans H).

i. Soit $a \in U$, si $f_1, \ldots, f_p$ sont différentiables en a alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \mathrm{d}M(f_1, \ldots, f_p)(a)(h) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(a), \ldots, f_{k-1}(a), \mathrm{d}f_k(a)(h), f_{k+1}(a), \ldots, f_p(a)).$$

ii. Si $f_1, \ldots, f_p$ sont différentiables sur U alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable sur U.

3.3 Composition

3.3.1 Différentielle d'une composée d'applications différentiables

Proposition 13.
Soit f une application de U dans F et soit g une application de V dans G où V est un ouvert de F contenant $f(U)$.

i. Soit $a \in U$, si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$.

ii. Si f est différentiable sur U et si g est différentiable sur V alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

3.3.2 Dérivée le long d'un arc

Proposition 14. Dérivée le long d'un arc Soit f une application de U dans F et soit une fonction $\gamma : I \to U$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $t \in I$, si γ est dérivable en t et si f est différentiable en $\gamma(t)$ alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$.

Corollaire 1. règle de la chaine, première version
Soit $E = \mathbb{R}^n$, soit f une application différentiable de U dans F et soit $\gamma : t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ une fonction dérivable de I dans U.
La fonction $g : t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est alors dérivable sur I et :
$\forall t \in I, g'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x'_k(t) \partial_k f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

3.3.3 Matrices jacobiennes et dérivées partielles

Proposition 15. Matrice jacobienne
On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$.
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^p$ et soit g une application de V dans $\mathbb{R}^q$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(U)$.
Soit $a \in U$, si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors :
$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \times Jf(a)$.

Proposition 16. Règle de la chaine, cas général
Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ des bases de E et F.
Soit f une application de U dans F dont on note $f_1, \ldots, fp$ les applications coordonnées dans $\mathcal{B}_F$.
Soit g une application de V dans G où V est un ouvert de F contenant $f(U)$.
Soit $a \in U$, si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors les dérivées partielles de f (dans $\mathcal{B}_E$), g (dans $\mathcal{B}_F$) et $g \circ f$ (dans $\mathcal{B}_E$) sont liées par les relations suivantes :
$\forall k \in [\![1, n]\!], \partial_k (g \circ f)(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \partial_k f_j(a) \partial_j g(f(a))$.

Notations usuelles, utilisées notamment en physique :

On considère une fonction u de n variables réelles à p composantes réelles : $(x_1, \ldots, x_n) \in U \mapsto (u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n)) \in V$.

On considère une fonction de p variables réelles $\varphi : (u_1, \ldots, u_p) \in V \mapsto \varphi(u_1, \ldots, u_p)$.

On pose alors $\psi = \varphi \circ u$, i.e. $\Psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n))$, Si les fonctions u et φ sont différentiables, alors ψ l'est également et on a :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}.$$

4 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

4.1 Définition et structure

Définition 10.
• Une application de U dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle est différentiable sur U et si sa différentielle est continue sur U.
• L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F se note $\mathcal{C}^1(U, F)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$.

Proposition 17.

i. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, G)$ alors pour une application bilinéaire B sur $F \times G$, la fonction $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

ii. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ où V est un ouvert de F contenant $f(U)$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

4.2 Caractérisation par les dérivées partielles

Théorème 1.
Soit f une application de U dans F et soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E.

Soit V l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x_1, \ldots, x_n) \in V \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in U$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, elle admet des dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ selon toutes ses variables en tout point de V et si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $\partial_k f_{\mathcal{B}}$ est continue sur V.

4.3 Intégration le long d'un arc

Proposition 18.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F et soit γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans U.

Posons $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$, on a alors : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\mathrm{d}t$.

Proposition 19. Caractérisation des fonctions constantes
Si U est un ouvert connexe par arcs de E, une application de U dans F est constante sur U si, et seulement si, elle est différentiable et de différentielle nulle sur U.

5 Vecteurs tangents à une partie de E

Définition 11.
Soit A une partie de E et soit $a \in A$.
- Un vecteur x de E est dit tangent à A en a s'il existe une fonction γ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (où $\varepsilon > 0$) dans A dérivable en 0 et telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = x$.
- L'ensemble des vecteurs tangents à A en a est noté $T_a A$.

Proposition 20. Espace tangent à une partie définie par une équation
Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et soit $A = g^{-1}(\{0\})$.
Soit $a \in A$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$ alors l'ensemble tangent à A en a est $T_a A = \ker(\mathrm{d}g(a))$.

Corollaire 2. Cas d'un espace euclidien
Soit E euclidien et soit g est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et soit $A = g^{-1}(\{0\})$.
Soit $a \in A$ tel que $\nabla g(a) \neq 0$ alors l'ensemble tangent à A en a est $T_a A = (\nabla g(a))^{\perp}$.

6 Optimisation au premier ordre

6.1 Point critique

Définition 12.
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$, on dit que a est un point critique de f si f est différentiable en a et si la différentielle de f en a est nulle.

Proposition 21. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a.
Si la fonction f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

6.2 Optimisation sous contrainte

Proposition 22. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local d'une restriction
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et soit A une partie de U.
Soit $a \in A$ tel que f soit différentiable en a.
Si la restriction de la fonction f à A admet un extremum local en a alors $T_a A \subset \ker(\mathrm{d}f(a))$.

Proposition 23. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sous contrainte
Soient f et g des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.
Soit $A = g^{-1}(\{0\})$ et soit $a \in A$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$.
Si la restriction de la fonction f à A admet un extremum local en a alors $\mathrm{d}f(a)$ et $\mathrm{d}g(a)$ sont colinéaires.

7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

7.1 Définition et théorème de Schwarz

Définition 13. Dérivées partielles multiples
Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E et soit f une application de U dans F qu'on identifie à $f_{\mathcal{B}}$.
On définit par récurrence les dérivées partielles multiples de f de la manière suivante :
soit $(j_1, \ldots, j_k) \in [\![1, n]\!]^k$ (où $k \geq 2$), si la fonction $\partial_{j_{k-1}, \ldots, j_1} f$ est définie sur U et admet une dérivée partielle selon sa j_k-ième variable alors cette dérivée est notée $\partial_{j_k, \ldots, j_1} f$.

Définition 14. Fonction de classe $\mathcal{C}^k$
Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E et soit f une application de U dans F qu'on identifie à $f_{\mathcal{B}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si, pour tout $(j_1, \dots, j_k) \in [\![1, n]\!]^k$, la fonction $\partial_{j_k,\dots,j_1} f$ est définie et continue sur U.

Théorème 2. Théorème de Schwarz
Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E et soit f une application de U dans F qu'on identifie à $f_{\mathcal{B}}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U alors les dérivées partielles d'ordre k de f sont indépendantes de l'ordre de dérivation, i.e : $\forall (j_1, \dots, j_k) \in [\![1, n]\!]^k$, soit σ une permutation de $[\![1, k]\!]$, on a $\partial_{j_{\sigma(k)},\dots,j_{\sigma(1)}} f = \partial_{j_k,\dots,j_1} f$.

7.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition 24.

- **i.** Si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U, F)$ alors, pour tous réels λ et μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.
- **ii.** Si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U, G)$ alors pour une application bilinéaire B sur $F \times G$, la fonction $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.
- **iii.** Si $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(V, G)$ où V est un ouvert de F contenant $f(U)$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

7.3 Développement limité au second ordre

Définition 15. Matrice hessienne
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in U$, on appelle matrice hessienne de f en a et on note $H_f(a)$ la matrice :

$$H_f(a) = (\partial_{i,j} f(a))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} .$$

Proposition 25. formule de Taylor à l'ordre 2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$.
Soit $q(a) : h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \partial_{i,j} f(a) h_i h_j$
On a alors pour $h \in \mathbb{R}^n$ au voisinage de 0 : $f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \dfrac{1}{2} q(a)(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2)$.
En identifiant h et la matrice colonne $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, on peut aussi écrire :
$f(a + h) = f(a) + \nabla_f(a)^T h + \dfrac{1}{2} h^T H_f(a) h + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2)$.

7.4 Optimisation au second ordre

Proposition 26. Condition nécessaire et condition suffisante d'existence d'un minimum local
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$ un point critique de f.

- **i.** Si f admet un minimum local en a alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- **ii.** Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un minimum local strict en a.

Corollaire 3. Cas d'une fonction de deux variables
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in U$ un point critique de f.

i. Si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en a.

ii. Si $\det(H_f(a)) > 0$ alors f admet un extremum local en a qui est :
— un minimum local si $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$;
— un maximum local si $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$.

8 Équations différentielles aux dérivées partielles

On s'appuie sur la proposition suivante :

Proposition 27.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert convexe U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définissons l'intervalle $I = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in U\}$, on a alors :
$\forall (x, y) \in U, \partial_1 f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tel que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \varphi(y)$.

Le but est donc, à l'aide d'un changement de variable, de se ramener à une équation ne comportant plus qu'une seule dérivée partielle. Pour cela on utilise la formule « de la chaîne » qui permet de relier les dérivées partielles de la fonction d'origine aux dérivées partielles de la fonction obtenue par changement de variable.

On peut notamment utiliser les changements de variables linéaires ou le passage en coordonnées polaires.