

M.P. – Préparation à l’oral 2022

1 Exercices posés à l’oral 2025 aux élèves de la MP de Fénelon

1.1 Exercices faciles

Exercice 1. ★ Sarah Qbaich – IMT

Soit a un réel et soit f une fonction définie par $f(t) = ae^{1+t^2}$ pour tout t réel.

1. Développer f en série entière.
2. On suppose que f est la fonction génératrice d’une variable aléatoire X . Déterminer la loi de X , la valeur de a , et calculer l’espérance de X .
3. Déterminer la loi et l’espérance de $Y = \frac{X}{2}$.

Exercice 2. ★ Sarah Qbaich – IMT

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang, l’image, le noyau et le déterminant de cette matrice sans calcul.
2. Diagonaliser cette matrice sans calcul.

Exercice 3. ★ ENSEA – Lina Barkani

On pose $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_0, \dots, P_n) est une base de $R_n[X]$.
2. Montrer que, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $P_n(k)$ est un entier dont on donnera une écriture simplifiée.

Exercice 4. ★ Julie Massey – ENSEA

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n dt$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} I_n x^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}$. Que peut-on en déduire pour R ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que la série $\sum I_n$ diverge et donner la valeur de R .
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ converge.

1.2 Exercices de difficulté raisonnable

Exercice 5. ★★ ENSEA – Cécilia Sun

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{(i+j)2^{-i-j}}{4e^4 i! j!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y . Ces variables sont-elles indépendantes?
2. Montrer que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 6. ** IMT – Zakary Ghezali

Soient n dés équilibrés à 6 faces. On lance indépendamment chaque dé jusqu'à obtenir 6, quand un dé fait 6 on le retire. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers pour que tous les dés aient fait 6.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ déterminer $(P(X \leq k))$.
2. Montrer qu'on ne peut pas faire une infinité de lancers.
3. X admet-elle une espérance finie ?
4. X admet-elle une variance ?

Exercice 7. ** IMT – Tiphaine Le Poulain

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes telles que X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p et Z suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Soit A la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -Y \\ 0 & Z & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & Z & 0 \\ -Y & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$.

Déterminer $P(A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8. ** IMT – Tiphaine Le Poulain

On se place dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z^2 = 1\}$.

Quels sont les points de E les plus proches de l'origine ?

Exercice 9. ** CCINP – Max Mourey

1. Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.
2. Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$ sont bien définies et qu'elles sont égales.
3. Exprimer $I + J$ en fonction de I et en déduire la valeur de I et J .

Exercice 10. ** IMT – Ariane Meunier

On considère l'intégrale $I_x = \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt$.

1. Pour quels réels x cette intégrale I_x est-elle convergente ? Calculer I_x dans ce cas.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} dt$.

Exercice 11. ** CCINP – Ariane Meunier

Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où $f_n : x \mapsto e^{-n^2 x^2}$.

On note S la somme de cette série de fonctions.

1. Quel est l'ensemble de définition de S ?
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. En admettant le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt$ pour $x \neq 0$.
4. Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 12. ★★ CCINP – Lina Barkani

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$.

Montrer que $E(Z) = N - \sum_{k=0}^{N-1} P(Z \leq k)$.

2. On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On note X le plus grand numéro tiré.

(a) Déterminer $P(X \leq k)$ pour tout entier k et en déduire la loi de X .

(b) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{N-1} k^n$ (à n fixé) quand N tend vers $+\infty$.

(c) En déduire un équivalent de $E(X)$ quand N tend vers $+\infty$.

Ce résultat vous semble-t-il prévisible ?

Exercice 13. ★★ ENSEA – Lina Barkani

Soit $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(e^t - 1)$.

1. Déterminer un développement limité de $\phi(t)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

En déduire $\phi^{(k)}(0)$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

2. On pose $p_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$.

Calculer p_1, p_2 et p_3 puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq n!$.

3. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que la rayon de convergence R de la série entière définissant f est non nul.

Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = e^x f(x)$.

En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \phi(x)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi^{(n)}(0) = p_n$.

Exercice 14. ★★ IMT – Solenne Tiv

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi donnée par $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = -1) = 1 - p$ (où $p \in]0, 1[$).

1. Déterminer la loi de $Z = \prod_{k=1}^n X_k$.

2. Déterminer $P\left(\sum_{k=1}^n X_k = 0\right)$.

Exercice 15. ★★ ENSEA – Solenne Tiv

On considère $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est également dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

2. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16. ★★ ENSEA – Solenne Tiv

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - 1| \leq |u|$.

2. Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R} puis exprimer f sans intégrale.

Exercice 17. ★★ Sarah Qbaich – CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

1. Donner le déterminant de cette matrice.
2. Déterminer son rang.
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 18. ★★ Julie Massey – CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.
2. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n x^n$ dont on note f la somme.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : (1-4x)y'(x) + 2y(x) = 1$.
4. Déterminer une solution constante de (E) puis en déduire l'ensemble des solutions de (E) .
5. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
6. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x)^2 = f(x) - x$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$.

Exercice 19. ★★ Julie Massey – IMT

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la valeur $S = \sum_{i=1}^n \langle v(e_i) | e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormale (e_1, \dots, e_n) choisie.
2. Montrer que la valeur $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v(e_i) | f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormales (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_n) choisies.
3. Calculer S et T dans le cas où v est un projecteur orthogonal de rang r .

Exercice 20. ★★ Alex Zhu – CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et soit $g = Id - f$.

1. Montrer que $\ker(g) = (\text{Im}(g))^\perp$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \|x - f^n(x)\| \right) = 0$.
3. Soit h le projecteur orthogonal sur $\ker(g)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \right) = h(x)$.

Exercice 21. ★★ Mohamed Aït Bentaaza – ENSEA

1. Décomposer $\frac{2X+1}{2X-1}$ en éléments simples.
2. Déterminer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$.
3. Justifier que S est définie en 1 et calculer $S(1)$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Exercice 22. ★★ Alexandre Molio – CCINP

Soit E un espace vectoriel et soit s une symétrie de E distincte de Id et $-Id$.

Soit $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \frac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$.

1. Déterminer $\varphi(Id)$ et $\varphi(s)$.
2. On pose $F = \ker(s - Id)$ et $G = \ker(s + Id)$.
Quelle relation entre F , G et E peut-on écrire ?
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $u \in \ker(\varphi)$ si, et seulement si, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vecteur propre de φ .
Soit $x \in F$, déterminer une relation entre $u(x)$ et $s(u(x))$.
Même chose pour $x \in G$.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul, montrer qu'il existe $x \in F \cup G$ tel que $u(x) \neq 0$.
6. Montrer que $\text{Sp}(\varphi) = \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 23. ★★ Alexandre Molio – ENSEA

Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 24. ★★ Alexandre Molio – ENSEA

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A \in E \setminus \{0\}$ et on définit l'application $f : M \in E \mapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Déterminer la matrice canoniquement associée à f .
4. Déterminer le spectre de f et préciser si f est diagonalisable.

Exercice 25. ★★ Maëlys Oster – IMT

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n-1)}{n} x^n$ de rayon de convergence R et de somme f .

1. Déterminer R .
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 26. ★★ IMT – Lucie Hoang Gia

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\text{Tr}(M) = n$.

Exercice 27. ★★ IMT – Lucie Hoang Gia

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} \cos(xt) dt$.

1. Pour quel réels x peut on définir (Fx) ?
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition.

3. Écrire F sans signe intégral.

Exercice 28. ★★ IMT – Constance Roger

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M .

2. M est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 29. ★★ CCINP – Constance Roger

On considère la série entière complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ de rayon de convergence R et de somme S .

1. Déterminer R .

2. Donner, sans justification, la valeur de $S(x)$ pour x réel dans $] -R, R[$.

3. Montrer que $S(-R)$ est défini et donner sa valeur.

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ converge et calculer sa somme grâce à la question précédente.

5. Donner, pour tout x réel dans $] -R, R[$, une expression de $S(ix)$ à l'aide de fonctions usuelles puis simplifier $\exp(S(ix))$.

Exercice 30. ★★ CCINP – Tess Etienne-Moreau

Soient $n+1$ réels distincts a_0, \dots, a_n , pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

On pose $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(a_0) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.

3. Rappeler la définition des polynômes interpolateurs de Lagrange en a_0, \dots, a_n , on les note L_0, \dots, L_n .

4. Déterminer des bases orthonormales de H et de H^\perp .

5. Déterminer le projeté orthogonal sur H de $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 31. ★★ IMT – Tess Etienne-Moreau

Soit $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$.

Soient a et b dans \mathbb{R}_+^* , montrer que f admet un minimum sous la contrainte $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et préciser la valeur de ce minimum et où il est atteint.

Exercice 32. ★★ IMT – Tess Etienne-Moreau

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, P(X=i, Y=j) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur de λ .

2. Déterminer les lois marginales de X et Y . Ces variables sont-elles indépendantes ?

3. Quelle est la loi de $X-1$? En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 33. ** ENSEA – Aurélien Romanetti

Soit $P = X^3 - X + 1$

1. Montrer que P admet trois racines complexes distinctes, on les note b_1, b_2 et b_3 .

2. Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 + b_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + b_3 \end{vmatrix}$.

Exercice 34. ** IMT – Max Mourey

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)$.

Exercice 35. ** CCINP – Aurélien Romanetti

On considère U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale $B(2, 1/2)$.

1. Question préliminaire : donner la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et celle d'une loi binomiale de taille n et de paramètre p .

Que dire de la loi suivie par $A = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ quand X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ?

2. déterminer la loi de $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^1$.

3. Soit $T = (U - 1)(V - 1) + 1$, montrer que $S(T - 1)$ est centrée.

4. Calculer $\text{Cov}(S, T)$. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 36. ** IMT – Julia Biernat

Déterminer la nature de la série $\sum (\arctan(n + a) - \arctan(n))$ où $a > 0$.

Exercice 37. ** IMT – Julia Biernat

Dans \mathbb{R}^4 euclidien on pose P d'équation $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à P .

Exercice 38. ** CCINP – Julia Biernat

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$ où x est réel.

1. Déterminer le domaine de définition I de S .

2. Montrer que S est continue sur I .

3. Montrer que S est dérivable sur $I \setminus \{0\}$.

4. *** *ajouté par M. Denizet* : montrer que S n'est pas dérivable en 0.

Indication : on pourra montrer et utiliser que, pour tout $u \in [0, \ln(2)]$, $1 - e^{-u} \geq \frac{u}{2}$.

Exercice 39. ** CCINP – Tiphaine Le Poulain

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \lambda 3^{-k}$.

(a) Quelle est la valeur de λ ?

(b) X a-t-elle plus de chance d'être pair ou d'être impair ?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p et soit $Z = \min(X, Y)$.

(a) Quelle est la probabilité de $P(X = Y)$? Celle de $P(X \geq Y)$?

(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n)$ puis $P(Z > n)$.

(c) Montrer que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z .

Exercice 40. ** IMT – Alex Zhu

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = \text{Im}(u)$ si, et seulement si, n est pair.

1.3 Exercices plutôt difficiles

Exercice 41. *** ENSEA – Christan Ozom

Donner un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

Exercice 42. *** ENSEA – Christan Ozom

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant $P(X^2) = P(X) = P(X+1)$.

1. Montrer que P est unitaire.
2. Montrer que l'ensemble des racines de P est stable par l'application $z \mapsto z^2$.
3. Montrer que toute racine de P est de module 1.
4. Montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z-1| = 1\}$ est réduit à deux points.
5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non nuls vérifiant $P(X^2) = P(X) = P(X+1)$.

Exercice 43. *** ENSEA – Aurélien Romanetti

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx} \cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Justifier l'existence de I_n et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 44. *** Maëlys Oster – CCINP

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ de rayon de convergence R et de somme f .

1. Déterminer R et préciser la convergence de cette série en R et en $-R$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) = +\infty$.
3. Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 2} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} ((1-x)f(x)) = 0$.

Exercice 45. *** CCINP – Christian Ozom

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} tel que $0 \in I$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et soit g défini sur I par $g(0) = f'(0)$ et, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Montrer que g est continue sur I puis que g est dérivable sur I .
2. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{0\}$ et que, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{p-k} p!}{k! x^{p+1-k}} f^{(k)}(x).$$

3. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^n sur I et que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $g^{(p)}(0) = \frac{f^{(p+1)}(0)}{p+1}$.

Exercice 46. *** IMT – Christian Ozom

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ on pose $G(v) = u \circ v$, $D(v) = v \circ u$ et $T(v) = u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que G et D commutent puis calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que u est nilpotent si, et seulement si, T est nilpotent.
3. On suppose u diagonalisable.

- (a) Étudier les valeurs propres de T en fonction de celles de u .
- (b) Montrer que tout polynôme annulateur de u est annulateur de T .

Exercice 47. *** IMT – Constance Roger

Soit E l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ usuelle.
 Pour tout $u \in E$ on pose $\Delta(u) = v$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E et déterminer $\|\Delta\|$.

Exercice 48. *** IMT – Aurélien Romanetti

Soit E un espace euclidien.
 On note \mathcal{S}^+ l'ensemble des morphismes autoadjoints positifs de E .

1. Montrer que \mathcal{S}^+ est stable par E .
2. Soit $u \in \mathcal{S}^+$, montrer que $\text{Im}(u) = \ker(u)^\perp$.
3. Soit $u \in \mathcal{S}^+$, montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+$ tel que $v^2 = u$.
4. Soient u et v dans \mathcal{S}^+ , montrer que $\ker(u + v) = \ker(u) + \ker(v)$ et $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

Exercice 49. *** Mohamed Aït Bentaaza – CCINP

Soient deux réels a et b strictement positifs.

1. Soit $L \in \mathbb{R}$, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto \begin{cases} L & \text{si } x < 0 \\ \frac{L}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Justifier que, pour tout réel u , l'intégrale $\int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx$ existe et déterminer la limite suivante : $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx \right)$.

2. Soit une fonction f définie et continue sur \mathbb{R} , intégrable sur \mathbb{R}_+ et admettant une limite finie L en $-\infty$. Déterminer $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\int_u^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx \right)$.
3. On suppose $a \neq b$. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{X}{(1+aX)(1+bX)}$ en éléments simples puis justifier l'existence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(a+e^{-x})(b+e^{-x})} dx$.
4. Lorsque $a = b$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(a+e^{-x})(b+e^{-x})} dx$ est-elle convergente ?

Exercice 50. *** Julie Massey – ENSEA

Soit $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.
3. Donner la matrice A canoniquement associée à ϕ .
4. Préciser A^j pour tout $j \in \mathbb{N}$.
5. Cette matrice A est-elle inversible ? Si oui, préciser A^{-1} ?

Exercice 51. *** IMT – Max Mourey

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soient $C_X = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$ et $C_Y = \begin{pmatrix} P(Y=1) \\ \vdots \\ P(Y=n) \end{pmatrix}$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = P([X=i] \cap [Y=j])$.

1. On suppose que X et Y sont indépendantes, montrer que M est de rang 1.
2. Réciproquement, on suppose que M est de rang 1.
 - (a) Montrer qu'il existe des matrices colonnes U et V à coefficients positifs tels que $M = UV^T$.
 - (b) Calculer $\sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j$.
 - (c) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 52. *** CCINP– Zakazy Ghezali

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère un jeu à $N + 1$ joueurs, les joueurs se lancent une balle avec la proba $1/N$ de la recevoir, on suppose que le joueur 1 a la balle au début.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le numéro du joueur qui a la balle à l'issue du n -ième lancer.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{N}[1 - P(X_n = 2)]$
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n .
3. On note Y la variable aléatoire qui compte le numéro du lancer à l'issue duquel le joueur 1 reçoit à nouveau la balle (pour la première fois).
Déterminer la loi de Y et son espérance.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$ et donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 53. *** IMT – Alex Zhu

Soit $\theta \in]0, \pi[$, calculer $I(\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos(\theta) \cos(x)}$.

Indication : on pourra utiliser la changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 54. *** ENSEA – Cécilia Sun

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = ij^2$.

1. Déterminer le rang de A et, sans calculer son polynôme caractéristique, préciser les valeurs propres de A .
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres de A

Exercice 55. *** CCINP – Solenne Tiv

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ où a et b sont dans \mathbb{R}_+^* .

1. Montrer que I converge.
2. Soit $h > 0$, montrer que $\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
3. En utilisant $\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$, donner une expression simple de I .

Exercice 56. *** CCINP – Lucie Hoang-Gia

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(0) = 1, f_n(1) = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout } t \in]0, 1[, f_n(t) = t^{2n+1} \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}.$$

1. Montrer que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$ puis sur $[0, 1[$ puis sur $[0, a]$ où $0 < a < 1$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.
- Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 57. *** Centrale 1 – Lucie Hoang-Gia

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

- Énoncer le théorème de dérivation pour les suites de fonctions.
- Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une limite notée f et que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- La série $\sum f_n$ est-elle uniformément convergente sur \mathbb{R} ?
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x)) = 0$.
- Déterminer un équivalent de $f'(x)$ en $+\infty$.

Exercice 58. *** IMT – Ariane Meunier

On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Soit p le projecteur sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1 + e_2)$ et soit A la matrice canoniquement associée à p .

- Déterminer A .
- Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$ puis toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = -B$.
- Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u : B \mapsto AB - BA$.
Montrer que u est diagonalisable et préciser son spectre.

Exercice 59. *** IMT – Zakary Ghezali

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$.

- Montrer qu'il existe $(L_1, \dots, L_d) \in \mathbb{R}_d[X]$ tq $\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, expliciter l'expression de tels polynômes. On admet que c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$, donner les coordonnées de P dans la base (L_1, \dots, L_d) .
- Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_d[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 60. *** IMT – Solenne Tiv

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $c \in \mathbb{R}^n$, on pose $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Sx|x \rangle + 2\langle c|x \rangle$.

- Montrer que f admet un unique point critique et préciser où il est atteint.
- Montrer que f admet un minimum global en ce point critique.

Exercice 61. *** Maëlys Oster – IMT

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 62. *** Maëlys Oster – Centrale 2

Soit $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(A)\}$ et soit $F : A \in \mathcal{E} \mapsto (I - A)(I + A)^{-1}$.

On pose, pour tous réels p, q et r , $G(p, q, r) = \llbracket [0, p, r], [-p, 0, q], [-r, -q, 0] \rrbracket$.

On note les questions Python avec l'indication [P].

1. [P] Coder F .
2. [P] À l'aide de $np.random.random([3, 3])$, générer des matrices M . Comparer pour quelques exemples $F(F(M))$ et M . Que peut-on conjecturer ?
3. [P] Calculer $A1 = G(1, 1, 1)$ et $Q1 = F(A1)$. Trouver le sous-espace vectoriel associé à 1. De quelle dimension est-il ? Faire de même pour $A2 = G(2, 1, 2)$. Conjecturer.
4. Montrer que si A commute avec B et B est inversible alors A commute avec B^{-1} .
5. Montrer que F est bijective de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .
6. Exprimer $F(M^T)$ en fonction de $F(M)$ et, si M est inversible, $F(M^{-1})$ en fonction de $F(M)$.
7. Soit $M \in \mathcal{E}$ orthogonale. Montrer que $M \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et que $F(M)$ est antisymétrique.

1.4 Exercices difficiles

Exercice 63. ★★★ Julie Massey – IMT

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z - e^{it}} dt$ où z est un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$.

On pourra différencier les cas selon que $|z| < 1$ ou $|z| > 1$.

Remarque de M. Denizet : en restant dans le cadre du programme de M.P cet exercice me semble difficile, je conseille de se ramener au cas où z est réel et de calculer alors l'intégrale par méthodes classiques de "primitivation". Cela dit, peut-être qu'une astuce m'a échappé qui simplifierait les choses.

Exercice 64. ★★★ Mines – Axel Pustetto

Soient D_1, \dots, D_p des droites affines de \mathbb{R}^2 non parallèles deux-à-deux et soient f_1, \dots, f_p des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 telle que chaque D_i ait pour équation $f_i(x, y) = a_i$.

On pose, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g_i = f_i - a_i$.

Soit $T = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} D_i$ et soit C une composante connexe par arcs de T .

1. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, montrer que g_i est de signe constant sur C .
2. Soit $\phi : z \in C \mapsto \sum_{i=1}^p b_i \ln |g_i(z)|$ où les b_i sont des constantes dans \mathbb{R}_+^* .
 - (a) Montrer que ϕ est de classe \mathcal{C}^2 sur C .
 - (b) Soient z_1 et z_2 distincts dans C et soit $\psi : t \in [0, 1] \mapsto \phi(tz_1 + (1-t)z_2)$.
Montrer que ψ est concave et que ψ'' ne s'annule pas.
 - (c) On suppose C bornée. Montrer que ϕ admet un unique point critique sur C et préciser si elle y admet un extremum.

Exercice 65. ★★★ Centrale 1 – Constance Roger

1. Rappeler la définition du rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ et justifier le comportement de la série pour $|Z| < R$ et pour $|Z| > R$.
Par la suite, R est le rayon de convergence de la série entière $\sum \tan(n) z^n$.
2. Montrer que $R \leq 1$.
3. On admet qu'il existe $\mu > 2$ tel que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^\mu}$.
Montrer que $R = 1$.

2 Exercices antérieurs

2.1 Exercices faciles

Exercice 66. ★ IMT

Déterminer un équivalent simple quand x tend vers 0^+ de $\int_x^1 \frac{\cos(t)}{t} dt$.

Exercice 67. ★ IMT

Soit E un espace vectoriel quelconque, et soit f un endomorphisme tel que $f \circ f = f$

1. Montrer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
Donner une interprétation géométrique.
2. Si E est de dimension finie, comment peut-on représenter la matrice de f dans une base bien choisie ?
3. Donner un exemple d'un endomorphisme qui ne vérifie pas $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exercice 68. ★ CCINP

Soit $n \geq 2$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A et donner la dimension de son noyau.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de 0 ?
4. Montrer que pour $n \geq 3$, A admet trois valeurs propres distinctes : 0, λ et $1 - \lambda$.
5. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 69. ★ CCINP

On s'intéresse à la série entière définie par :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. On définit par $S(x)$ la somme de cette série entière sur son disque ouvert de convergence, exprimer $S''(x)$ et en déduire $S(x)$.
3. Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

Exercice 70. ★ IMT

1. On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
Déterminer les points critiques de f .
2. Déterminer les extrema de la fonction f .

Exercice 71. ★ IMT

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-r, r]$ et en déduire que f est continue sur $] - R, R[$.
2. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge absolument, montrer que f est continue sur $[-R, R]$.
3. Donner un exemple où f est continue sur $] - 1, 1]$ mais non définie en -1 .

Exercice 72. ★ CCINP

On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + 2M^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
3. f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer la trace et le déterminant de f .

Exercice 73. ★ ENSEA

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de A et en déduire le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les éléments propres de A .
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 74. ★ ENSEA

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

Soit Y définie par $Y(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$.

1. Rappeler les développements en série entière de ch et sh .
2. Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 75. ★ ENSEA

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E) suivante : $xy''(x) + 4y'(x) - 3x^3y(x) = 0$.

On précisera le rayon de convergence.

Exercice 76. ★ ENSEA

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$ on pose $u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

On note S la somme de la série $\sum u_n$.

Montrer que S est définie et dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice 77. ★ IMT

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.

On tire sans remise dans cette urne et à chaque tirage on tire simultanément deux boules.

Calculer la probabilité qu'à chaque tirage on ait une boule rouge et une boule noire.

Exercice 78. ★ ENSEA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donner le module et un argument de $z^k - 1$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1|$.

Exercice 79. ★ IMT

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 80. ★ IMT

Étudier la convergence simple sur \mathbb{R}_+ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto \prod_{k=0}^n (1 + x^{2k}).$$

Exercice 81. ★ CCINP

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\text{pour } P = \sum_{i=0}^2 a_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^2 b_i X^i, \langle P|Q \rangle = \sum_{i=0}^2 a_i b_i.$$

1. Soit $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F .
2. Déterminer la distance de X à F .

Exercice 82. ★ IMT

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P|Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

1. Montrer que l'on a bien défini un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E telle que $\deg(P_i) = 1$.

Exercice 83. ★ IMT

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 10 \end{cases}$

Exercice 84. ★ IMT

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable et à valeurs propres strictement positives.
Montrer que A est diagonalisable

Exercice 85. ★ TPE/EIVP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait $P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)dt$.

Exercice 86. ★ IMT

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ .

1. Donner les fonctions génératrices de X et de $3Y$.
2. Soit $Z = 3Y + X$, donner la fonction génératrice de Z .
3. Donner l'espérance et la variance de Z .
4. Donner le minimum de $\mathbb{V}(Z + tX)$ lorsque t décrit \mathbb{R} .

Exercice 87. ★ IMT

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . On se donne f et g deux endomorphismes de E .
Montrer que : $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \inf(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Exercice 88. ★ IMT

Déterminer un nombre complexe z tel que $\sin(z) = 3$.

Exercice 89. ★ IMT

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\ln(n)^\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 90. ★ IMT

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(A)$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 91. ★ TPE/EIVP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.
2. Montrer que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 92. ★ CCINP

Soit x un nombre réel.

Soit E_x l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M + xI_n = 0$.

1. Si $x \neq 0$, montrer que toute matrice $M \in E_x$ est inversible et exprimer son inverse. Quelles sont les matrices inversibles appartenant à E_0 ?
2. Trouver α réel tel que, si $x < \alpha$, alors toute matrice $M \in E_x$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On suppose $x = -2$, déterminer l'ensemble T des traces des éléments de E_x . Quel est son cardinal ?

2.2 Exercices de difficulté raisonnable**Exercice 93.** ★★ IMT

Soit $(E) : xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$

1. Soit $R > 0$ et soit f développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$.
On suppose f solution de (E) , trouver la relation de récurrence des a_n .
2. En déduire une solution non nulle développable en série entière en 0.
3. Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .
4. En déduire les solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .
5. Existe-t-il des solutions sur \mathbb{R} ?

Exercice 94. ★★ IMT

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$.

Exercice 95. ★★ IMT

1. Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?
Donner un groupe usuel isomorphe au sous-groupe de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ engendré par $\bar{9}$.
2. Soient G et H deux groupes isomorphes et soit ϕ un isomorphisme de G dans H . Montrer que pour tout $g \in G$, l'ordre de $\phi(g)$ dans H est le même que l'ordre de g dans G .
3. Que peut-on dire de l'ordre des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?
4. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 96. ** IMT

On pose $f : x \mapsto \int_0^2 \frac{e^{2t}}{t + \sqrt{x}} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* ? Est-elle définie en 0 ?
2. Sans utiliser la dérivation, montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
5. A l'aide d'un encadrement de $\frac{e^{2t}}{t + \sqrt{x}}$, déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 97. ** CCINP

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$.

1. Montrer que, pour tout réel u on a $|\arctan(u)| \leq |u|$.
2. Montrer que F est bien définie sur \mathbb{R} .
3. Sur quel intervalle F est-elle continue ? Dérivable ?
4. Pour tout réel x , calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 98. ** IMT

Soit X la variable comptant le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X .
2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, montrer que pour $n > \frac{t}{p}$ on a

$$P(X \leq t) \leq \frac{np(1-p)}{(np-t)^2}.$$

3. Donner la loi de la variable aléatoire Y comptant le rang du premier succès (avec la valeur 0 en cas d'échecs à toutes les épreuves).

Exercice 99. ** CCINP

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n^2 x(1-x)^n$.

1. Déterminer le domaine de convergence D de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.
3. Que peut-on en déduire quant à la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0, 1]$? Vérifier cela par une étude directe.
4. Soient a et b tels que $0 < a < b < 1$, étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, b]$.

Exercice 100. ** ENSEA

On considère l'équation différentielle $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$.

On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ somme d'une série entière non nulle de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer une relation de récurrence sur les coefficients a_n .
2. Déterminer R .
3. A-t-on obtenu toutes les solutions de l'équation différentielle considérée ?
4. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles lorsqu'elle est paire.

Exercice 101. ** ENSEA

Soit un réel x , calculer le déterminant D_n (d'ordre n) défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} x^2 + 1 & x & & 0 \\ x & x^2 + 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & x^2 + 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 102. ** CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)^n} dt$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et converge.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{4n-1}{4n} I_n$.
4. Étudiez la convergence la série $\sum_{k \geq 1} \ln \left(\frac{4k-1}{4k} \right)$ et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n}$.

Étudiez la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R}_+ .

Y-a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ ? Sur \mathbb{R}_+^* ?

6. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en utilisant le théorème de convergence dominées.

Exercice 103. ** CCINP

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E .
2. Déterminer une relation entre les rangs de f et de g .

Exercice 104. ** CCINP

Soit f_0 une fonction continue sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-a, a]$, $f_n(x) \leq M \frac{|x|^n}{n!}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

On note désormais F la somme de cette série.

3. Montrer que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
4. Déterminer une équation différentielle satisfaite par F . En déduire une expression de F en fonction de f_0 .
5. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_0(t) dt$.
6. A l'aide de la question précédente, retrouver l'expression de F obtenue à la question 4.

Exercice 105. ** IMT

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle et distincte de I_2 telle que $A^2 = A^T$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A .
2. On suppose que A est inversible, déterminer alors le spectre de A .
3. On suppose que A n'est pas inversible, montrer que A est orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 106. ** IMT

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^n dt$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 107. ** Saint-Cyr

Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X - 5$ vaut 2 et dont le reste de la division euclidienne par $X - 7$ vaut 6.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(X - 5)(X - 7)$?

Exercice 108. ** IMT

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$.

Soit $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on considère une famille $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ qui vérifie la propriété (\star) suivante :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle < 0.$$

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $\{x_1\}^\perp$.

1. Calculer $p_1(x)$ pour tout $x \in E$.
2. Montrer que la famille $(p_1(x_i))_{i \in \llbracket 2, p \rrbracket}$ possède également la propriété (\star) .

Exercice 109. ** IMT

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et soient α et β deux réels non nuls.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum n^k e^{-n}$ converge.
2. On définit, pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n}$.

Vérifier que l'on a défini un produit scalaire sur E .

3. On pose $A \in E$ non constant et on définit $u : P \in E \mapsto \alpha \langle P, 1 \rangle + \beta \langle P, A \rangle A$.
 - (a) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E .
 - (b) Déterminer le noyau et l'image de u .

Exercice 110. ** CCINP

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

1. Montrer que $C(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie.
2. On suppose que f est diagonalisable et pour toute valeur propre λ de f on note m_λ son ordre de multiplicité.
 - (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $g \in C(f)$ si, et seulement si, tous les sous-espaces propres de f sont stables par g .

(b) Montrer que $\dim(C(f)) \geq \sum_{\lambda \in C(f)} m_\lambda^2$.

(c) Montrer que $\dim(C(f)) \geq n$.

(d) On suppose que toutes les valeurs propres de f sont simples, montrer que $(f^0, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de $C(f)$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension de $C(A)$ et une base de $C(A)$.

Exercice 111. ** ENSEA

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt$.

1. Montrer que I est bien définie et qu'elle vaut 0.

2. Calculer $I(a)$.

Exercice 112. ** - IMT

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $A \in \mathcal{M}_{2n-1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{n,n} = a + b$ et $\forall i \neq n, a_{ii} = a, a_{i,2n-i} = b$. Déterminer le polynôme minimal de A .

Exercice 113. ** IMT

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AA^T A = I_n$.

Exercice 114. ** - IMT

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n à coefficients positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+1}}.$$

2. Préciser P_0, P_1 et P_2 .

3. Calculer $P_n(1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 115. ** TPE/EIVP

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit le polynôme $A = 1 + X + X^2$ et soit u l'application qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A .

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

2. Déterminer les éléments propres de u .

3. u est-il diagonalisable ?

Exercice 116. ** IMT

Soient trois réels a, b et c .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 117. ** TPE/EIVP

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Soit $R \geq 2$, déterminer les extrema globaux de f sur $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

2. Soit $R \geq 2$, déterminer les extrema globaux de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 118. ** IMT

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ on note $N_\infty(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$.

On pose aussi $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f'$.

1. Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, pour cette norme N_∞ , u est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour laquelle u est continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Indication : on pourra utiliser une équation différentielle.

Exercice 119. ** IMT

L'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal est-elle continue ?

Exercice 120. ** ENSEA

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $\varphi : f \in E \mapsto (x \mapsto f'(x) + xf(x))$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

Exercice 121. ** CCINP

1. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_a^b \frac{dt}{t^{3/2} + t^{1/2}}$.

On pourra poser $u = \sqrt{t}$.

2. Justifier l'existence du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \mathbb{R}_n \leq 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. Déterminer un équivalent de \mathbb{R}_n en $+\infty$.

Exercice 122. ** IMT

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telles que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est bijectif. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$.

Exercice 123. ** Mines-

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$.
3. Montrer que $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f) \oplus (\ker(f) \cap \text{Im}(g))$.

Exercice 124. ** CCINP

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit S l'ensemble des solutions de l'équation $M - \text{tr}(M)A = B$.

1. S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? (on pourra discuter selon B).
2. On suppose que $\text{tr}(A) \neq 1$, pour $M \in S$ exprimer $\text{tr}(M)$ en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(B)$.
Donner S .
3. On suppose que $\text{tr}(A) = 1$, à quelle condition sur B a-t-on $S = \text{Vect}(A, B)$?

4. On suppose que A est la matrice dont tous les coefficients valent 1 et que $B = A^2$ et on considère $M \in S$.

La matrice M est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Exercice 125. ** CCINP

- Résoudre sur \mathbb{R} le système
$$\begin{cases} x'(t) = z(t) + \cos(t) \\ y'(t) = y(t) + 3 \exp(t) \\ z'(t) = x(t) + \sin(t) \end{cases}$$
- Préciser une solution de ce système tel que les fonctions x et z soient bornées sur \mathbb{R} et vérifient $x(0) = z(0)$.

Exercice 126. ** IMT

Soit une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

On y tire avec remise deux boules de numéros a et b .

On considère l'évènement E : « $\frac{a}{b}$ est un entier ».

- Calculer $P(E)$ pour $n = 3$ puis pour $n = 4$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(E) = \sum_{k=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n^2}.$$
- Déterminer un équivalent de $P(E)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 127. ** ENSEA

Soient $2n$ réels $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$, en posant $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ calculer le déterminant

suivant :
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & & \dots & b_2 \\ \vdots & b_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} + b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 128. ** CCINP

Soit $p \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n + 2) = (2 - p)P(X = n + 1) - (1 - p)P(X = n)$.

- Déterminer la loi de X .
- Soit Y une variable aléatoire discrète indépendant de X et suivant la loi géométrique de paramètre p .
On pose $S = X + Y$.
Déterminer la loi de S , son espérance et sa variance.
- Donner la loi de X sachant $[S = n]$
- On pose $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, donner la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 129. ** CCINP

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$.
2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle $t^2 y''(t) + y(t) = 0$.
Indication : utiliser le changement de variable $t = e^x$.
3. Déterminer les fonction f dérivables sur \mathbb{R}_+^* telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 130. ** IMT

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (x \tan(t))^2}$.

Soit $g : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \tan(t))}{\tan(t)} dt$.

1. Montrer que f et g sont bien définies sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

3. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Remarque de M. Denizet : pour réellement « calculer » $\int_0^1 f(x) dx$, il me semble nécessaire de

savoir que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt = \frac{\pi \ln(2)}{2}$.

Exercice 131. ** IMT

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E . Montrer l'équivalence suivante :

f est diagonalisable si, et seulement si, tout sous espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f .

Exercice 132. ** IMT

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit $\varphi(u) = f \circ u$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(f)$.

Déterminer les sous-espaces propres de φ .

3. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 133. ** IMT

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \{0, 1\}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 2^k \end{aligned}$$

Montrer que φ est injective et préciser son image.

Exercice 134. ** CCINP

Soit $\Delta : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .

- Déterminer le noyau de Δ et en déduire que Δ est surjective.
- Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, $\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$.

Exercice 135. ** CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$.
 Soient a et b deux vecteurs de E linéairement indépendants.
 Soit $u : x \in E \mapsto \langle a|x \rangle a + \langle b|x \rangle b$.

- Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E .
- Montrer que $\ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.
- Déterminer les éléments propres de u .

Exercice 136. ** CCINP

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 Soit $f : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v$.

- Montrer que le spectre de f est inclus dans le spectre de u .
- Soit λ une valeur propre de u de sous-espace propre associé E_λ .
 Soit v un projecteur de E sur E_λ , montrer que v est vecteur propre de f .
 Que peut-on en déduire pour les spectres de u et f ?
- Pour λ valeur propre de u on note F_λ le sous-espace propre de f associé à λ et on admet que $\dim(F_\lambda) = n \dim(E_\lambda)$ (*remarque de M. Denizet : on pourra le montrer en s'inspirant de la question précédente*).
 Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.
- Montrer que u et f ont même polynôme minimal.

Exercice 137. ** CCINP

Soit $(E) : y'(x) \cos(x) - y(x) \sin(x) + \cos^3(x) = 0$.

- Résoudre (E) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Existe-t-il des solutions de (E) sur $[0, \pi]$?

Exercice 138. ** ENSEA

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2} dt$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
- Calculer $f(x)$ pour $|x| < R$.

Exercice 139. ** ENSEA

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé.

- Déterminer les valeurs propres de A . A est-elle inversible ?
- A est-elle diagonalisable ?
- Montrer que f conserve l'orthogonalité.

Exercice 140. ** CCINP

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Justifier l'existence des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.
3. Calculer la dérivé de f en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 1)$.
4. Montrer que f n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 de deux manières différentes.

Exercice 141. ** IMT

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit B la base canonique de E .
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \det(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

1. Montrer que f est une forme n -linéaire alternée
2. En déduire que $f = \text{Tr}(u) \det_B$.

Exercice 142. ** IMT

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{1 + n^4 x^4} \right)$.

1. Montrer que f_n est bien définie.
2. Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur \mathbb{R}_+ .
3. $\sum f_n$ est-elle normalement convergente sur \mathbb{R}_+ ?
4. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 143. ** IMT

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n \ln(1 + t^2) dt$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$.
3. Déterminer un équivalent de $I_n - L$ en $+\infty$.

Exercice 144. ** IMT

Soit $f : x \mapsto \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2)$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Montrer que f est dérivable.
2. Développer f en série entière.

Exercice 145. ** IMT

On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$ dont on note f la somme.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière.
2. Comparer $f(x)$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x} \sin(t)} dt$.

Exercice 146. ** IMT

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système $\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 72 \end{cases}$

Exercice 147. ** CCINP

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et soit $d : P \in E \mapsto P'$.

1. Déterminer le polynôme minimal de d .
2. Soit $\varphi : P \mapsto P(X+1)$.
Écrire φ comme un polynôme en d .
3. Déterminer le polynôme minimal de φ .
4. Montrer que $\mathbb{R}[\varphi] = \mathbb{R}[d]$.

Exercice 148. ** Mines Pont

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants et soit l'événement E : "aucun A_n ne se réalise".

Montrer que $P(E) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P A_n\right)$.

Exercice 149. ** TPE/EIVP

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

Montrer que les sous-espaces stables par f sont les $\ker(f^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 150. ** IMT

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = A^T A$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T B X > 0$.
En déduire que $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe une matrice C inversible et symétrique telle que $C^2 = B$.
3. Montrer qu'il existe $(H, C) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = HC$.
4. En déduire une généralisation pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 151. ** IMT

On souhaite montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Justifier l'existence de ces deux quantités.
2. Peut-on utiliser le théorème d'intégration terme-à-terme pour justifier cette égalité ?
3. Démontrer l'égalité demandée à l'aide du théorème de convergence dominée.

Exercice 152. ** IMT

On pose $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1 + u_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$.

1. Étudier la suite ainsi définie.
2. Déterminer un développement asymptotique de u_n .

Exercice 153. ** TPE/EIVP

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, montrer que :

$$1 + (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \leq ((1 + \lambda_1) \times \dots \times (1 + \lambda_n))^{\frac{1}{n}}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique admet n racines comptées avec multiplicité dans \mathbb{R}_+ , montrer que :

$$1 + \det(A)^{\frac{1}{n}} \leq \det(I_n + A)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 154. ** IMT

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)^n = 0 \Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 155. ** TPE/EIVP

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y)^2(1 - x^2 - y^2)$.

1. Déterminer le signe de $f(x, y)$.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. f admet-elle un minimum global ?
4. Montrer que f possède un maximum global et préciser les points où il est atteint.
5. Préciser les extrema locaux de f .

Exercice 156. ** TPE/EIVP

Soit E un espace euclidien et soit $f : E \rightarrow E$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que f conserve la norme.
2. Montrer que f conserve le produit scalaire.
3. Montrer que f est linéaire.
4. Quelle-est la nature de f ?

Exercice 157. ** TPE/EIVP

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

On tire on hasard et avec remise A et B des parties de E , les deux tirages étant successifs et indépendants.

Calculer la probabilité que $\text{card}(A \cap B) = 1$.

Exercice 158. ** TPE/EIVP

On considère E l'ensemble des suites réelles bornées, indexées par \mathbb{N} .

On définit, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Soit T l'application définie sur E par $T(u) = v$ où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - (a) Montrer que T est un endomorphisme de E .
 - (b) T est-il continu ?

Exercice 159. ** IMT

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est

$$G_X : t \mapsto \frac{1}{(2 - t)^\alpha}.$$

2. Dans le cas où α est un entier, donner un équivalent simple de $PX = n$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $PX \geq (\lambda + 1)\alpha \leq \frac{2}{\lambda^2 \alpha}$.

Exercice 160. ** IMT

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1 - t^2)}{t^2} dt$.

Exercice 161. ** IMT

Soit un entier $n \geq 2$ tel que $2^n - 1$ est premier.

Montrer que n est premier.

Exercice 162. ★★ CCINP

Pour tous entiers p et k on pose $f_{p,k} : x \mapsto x^p \ln(x)^k$.

1. Montrer que, pour tous entiers p et k , $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0, 1[$. On pose désormais $I_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(t) dt$.
2. Exprimer $I_{p,k}$ en fonction de $I_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln(x))^n dx$ en fonction de n .
4. Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 163. ★★ CCINP

On considère l'équation différentielle $(E) : xy''(x) + y'(x) + y(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe une solution h de (E) développable en série entière et telle que $h(0) = 1$.
2. Montrer que h s'annule sur $]0, 2[$.
3. Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0, 2[$.

Exercice 164. ★★ CCINP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et soit $B = I_n + 4A + A^2$.

1. On suppose que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, montrer que A est un polynôme en B .
2. Donner un exemple de matrice A pour laquelle A n'est pas un polynôme en B .

Exercice 165. ★★ Mines-Telecom

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Simplifier $f(x)$ pour $x \in D$.
3. Étudier la convergence normale et la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur D .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))$, qu'en pensez-vous ?

Exercice 166. ★★ CCINP

Pour tout entier n , on définit la fonction f_n sur $]0, 1[$ par $f_n : x \mapsto \frac{x^{2n+1} \ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que, pour tout entier n , f_n est intégrable sur $]0, 1[$.
2. On pose, pour tout entier n , $J_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.
 - (a) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
 - (b) Montrer que, pour tout entier n , $J_n - J_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)^2}$.
 - (c) Montrer que, pour tout entier n , $J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
 - (d) En déduire un équivalent simple de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 167. ** IMT

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx$.

Exercice 168. ** TPE/EIVP

Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f : x \mapsto x^{-x}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^n}$ converge et que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 169. ** IMT

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre p (où $p \in]0, 1[$).

On note $q = 1 - p$ et on définit la variable aléatoire $Y = |X_1 - X_2|$.

1. Calculer $PY = 0$.
2. Déterminer la loi de Y .
3. Montrer que Y est d'espérance finie et préciser la valeur de son espérance.
4. Montrer que $\mathbb{E}(Y^2) = 2\mathbb{V}(X_1)$ et en déduire la variance de Y .

Exercice 170. ** CCINP

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement trois boules numérotées 0 et trois boules numérotées 1.

On appelle échange l'épreuve consistant à tirer au hasard et de façon indépendante, une boule de U_1 et une boule de U_2 puis à les échanger.

Pour un entier n , on désigne par X_n la variable aléatoire donnant la somme des numéros inscrits sur les boules de l'urne U_1 à l'issue de n échanges.

1. Déterminer les valeurs prises par X_n ainsi que les lois de X_0 et X_1 .
2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, chacune des probabilités $PX_{n+1} = i$ où $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ en fonction des $PX_n = j$ où $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} PX_n = 0 \\ PX_n = 1 \\ PX_n = 2 \\ PX_n = 3 \end{pmatrix}$.

On note de plus $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
- (b) Déterminer deux réels a et b tels que $LA = aL + bJ$.
- (c) En déduire, pour tout entier n , $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_n)$.
- (d) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout entier n .

Exercice 171. ** TPE/EIVP

Une urne contient une boule verte, une boule rouge et une boule blanche. On y effectue des tirages successifs avec remise.

X désigne le numéro du tirage où l'on tire la boule verte pour la première fois et Y le nombre de boules blanches tirées avant cette première boule verte.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y .
3. (a) Expliquer comment on peut obtenir la formule suivante (on ne demande pas le détail des calculs) :

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n = \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}.$$

(b) Déterminer la loi de Y .

4. (a) Montrer que : $\forall k \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, (k-1)(1+x)^{k-2} = \sum_{j=1}^{k-1} j \binom{k-1}{j} x^{j-1}$.

(b) Déterminer la covariance de X et Y .

Exercice 172. ★★ Mines-Pont

Soit G un groupe multiplicatif et soit $a \in G$ d'ordre pq où p et q sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple $(x, y) \in G^2$ tel que :
 $a = xy = yx$ avec x d'ordre p et y d'ordre q .

Exercice 173. ★★ CCINP

Soit $F : x \mapsto \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(xt)} dt$.

1. Justifier que F est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que F admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et déterminer ce développement.

Exercice 174. ★★ IMT

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 2}\right)$.

1. Déterminer un équivalent simple de cette suite.
2. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ? Est-elle convergente ?

Exercice 175. ★★ CCINP

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f : P \mapsto (1 + X^2)P'' - 2XP'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de f .

Exercice 176. ★★ IMT

1. Soit un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X+1) - Q(X) = X^2 + 1$, montrer que Q est de degré 3.
2. Déterminer tous les polynômes Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X+1) - Q(X) = X^2 + 1$.
3. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} P(t) dt = n^2 + 1$.

Exercice 177. ★★ TPE/EIVP

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in E$ et soit $x \in [0, 1]$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^x f(4(t-t^2)) dt$.
2. On définit sur E l'application T par :
 pour tout $f \in E$, $T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f(4(t-t^2)) dt$.

- (a) Montrer que T est un endomorphisme de E .
- (b) T est-il injectif ?
- (c) T est-il surjectif ?

Exercice 178. ** CCINP

1. Rappeler la définition du produit scalaire intégral usuel sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Pour tous réels a et b , on note $I_{a,b} = \int_0^1 (t \ln(t) + at + b)^2 dt$.

En exprimant $I_{a,b}$ à l'aide d'une norme euclidienne, déterminer la valeur minimale de $I_{a,b}$ et donner les valeurs de a et b pour lesquelles cette valeur est atteinte.

2.3 Exercices plutôt difficiles

Exercice 179. *** IMT

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que la somme de cette série entière (notée f) est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 180. *** IMT

Soit E un espace euclidien, on note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et soit $v = u - Id_E$.

1. Montrer que $\text{Im}(v)^\perp = \ker(v)$.
2. soit $x \in E$ et soit x_0 le projeté orthogonal de x sur $\ker v$, montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$.

Exercice 181. *** CCINP

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que I converge.
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $J(x) = \int_0^x \frac{t |\sin(t)|}{1+t^2} dt$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{1+(u+k\pi)^2} du$.

3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Exercice 182. *** IMT

1. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)$.
2. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\alpha \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right)$.

Exercice 183. *** CCINP

On pose $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4^{n+1}n!$.
2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$?
3. On note f la somme de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$, montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ sur un intervalle à préciser.
4. Résoudre cette équation en admettant que ses solutions non nulles ne s'annulent pas.
5. En déduire f .

Exercice 184. *** CCINP

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.
 - (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B)$.
 - (b) Montrer que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$.
2. Réciproquement, montrer que si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$ alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

Exercice 185. *** CCINP

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions f_n .
2. Convergence uniforme sur \mathbb{R} ?
3. Convergence uniforme sur $]0, \pi[$?
4. Convergence uniforme sur $[a, b]$ avec $0 < a < b < \pi$?

Exercice 186. *** Mines-Pont

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ et que la série $\sum_{n \geq 1} \Gamma_n$ converge.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre $\sum_{n=1}^N \Gamma_n$, $\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$ et Γ_{N+1} .
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n = \ln(2)$.

Exercice 187. *** IMT

Déterminer la nature des séries de termes généraux $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ et $v_n = \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^\alpha}}\right)$.

Exercice 188. * CCINP**

Soit l'équation différentielle $(E) : x(x+2)y'(x) + (x+1)y(x) - 1 = 0$.

1. Donner la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une solution développable en série entière.
4. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n}$.

Exercice 189. * Mines-Pont**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \text{tr}(A)A + I_n$, montrer que A est diagonalisable.
2. Pour quels entiers n existe-t-il de telles matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = \text{tr}(A)A + I_n$?

Exercice 190. * IMT**

Soit E l'espace des suites réelles convergentes.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$, on définit $c(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

1. Montrer que c est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les éléments propres de c .

Exercice 191. * TPE/EIVP**

On considère une urne avec n boules numérotées de 1 à n . On réalise k tirages sans remise et on note X la variable aléatoire réelle qui est égale au maximum des numéros des boules tirées.

1. Donner la loi de X .
2. Donner la loi de X si les tirages sont faits avec remise.

Exercice 192. ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Soit $(a_k)_{k \in [0, n-1]} \in \mathbb{K}^n$ et soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $P^{(n)} = Q$ et, pour tout $k \in [0, n-1]$, $P^{(k)}(\alpha) = a_k$.

Exercice 193. * Mines Pont**

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, montrer que la fonction $f_a : t \mapsto \frac{1}{a} t^{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2}\right)}$ est de carré intégrable sur $]0, 1]$.
2. Soient des réels non nuls a_1, \dots, a_n , montrer que $\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \frac{a_i a_j}{a_i^2 + a_j^2} \geq 0$.

Exercice 194. * IMT**

Soit $n \geq 2$ et soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible.

1. Donner un supplémentaire simple de H .
2. Montrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.
3. Montrer que H n'existe pas.

Exercice 195. * Mines Pont**

Soit $d > 0$ et soit $g : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^d e^{-tx} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$.
2. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} g(0)}{2\sqrt{t}}$.

On pourra utiliser l'égalité suivante : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 196. ★★★ IMT

Soient des familles de réels (a_1, \dots, a_{n+1}) et (b_1, \dots, b_{n+1}) .

Calculer le déterminant de la matrice $M = ((a_i + b_j)^n)_{1 \leq i, j \leq n+1}$.

Exercice 197. ★★★ Centrale

Soit $f : x \mapsto \cos(x)^{\frac{1}{x}}$ et soit \mathcal{C} le graphe de f .

On note \mathcal{E} l'ensemble des points de \mathcal{C} en lesquels la tangente à \mathcal{C} passe par O .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Montrer que \mathcal{E} est dénombrable.
3. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+ = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n .
- 4.

Exercice 198. ★★★ CCINP

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ et $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Justifier l'existence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer la nature des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 199. ★★★ CCINP

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$.

Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors d'un segment $[a, b]$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(t)g(t)dt \right) = g(0).$$

Exercice 200. ★★★ CCINP

1. Justifier que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut définir $\text{ch}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\text{Sp}(A) \subset \{-2, 1, 3\}$, exprimer A^n en fonction de I_3 , A et A^2 puis calculer $\text{ch}(A)$.

Exercice 201. ★★★ Mines-Télécom

Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé E .

Soit B une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée relativement à A .

Montrer que $B = \emptyset$ ou $B = A$.

Exercice 202. ★★★ Centrale

Soit E l'espace des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} paires et 2π -périodiques.

On considère les éléments suivants de E :

$$c_0 : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, c_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Pour tout $(f, g) \in E^2$ on définit le produit de f et de g par $\langle f|g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que E muni de ce produit est un espace préhilbertien réel.
2. Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E .

3. Montrer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre un sous-espace dense de E .

4. Soit $f \in E$ telle que la série $\sum \langle f | c_n \rangle$ converge absolument, montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f | c_n \rangle c_n$.

5. Ajout de M. Denizet :

Montrer que l'on peut définir $f \in E$ telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$.

Calculer $\langle f | c_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (vous l'aurez enfin démontré)

et celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 203. *** Centrale

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$.

1. Montrer que A est connexe par arcs.
2. Soit une fonction f de I dans \mathbb{R} continue et injective sur I , montrer que f est monotone.
3. Soit une fonction f de I dans \mathbb{R} dérivable sur I .

On pose $g : (x, y) \in A \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$ et en déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 204. *** Centrale

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$ ou $u^3 = u$, montrer que u est diagonalisable.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^4 = u$, u est-il nécessairement diagonalisable ?
3. On suppose E de dimension 3, déterminer une partie S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de cardinal minimal tel que tout endomorphisme de u de E tel que $u^4 = u$ admette dans une base de E une matrice élément de S .

Exercice 205. *** Centrale

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{u_n} + e^{v_n}) = 2.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 206. *** ENS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2} \right) = 1$.

La suite est-elle nécessairement convergente ?

Exercice 207. *** Mines-Pont

Soit E un espace vectoriel normé et soit K un compact non vide de E .

Pour $\alpha > 0$, une partie A de E est dite α -séparée si : $\forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| < \alpha \Rightarrow x = y$.

Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que toute partie de K α -séparée soit de cardinal inférieur ou égal à n_α et tel qu'il existe une partie de K α -séparée de cardinal égal à n_α .

Exercice 208. *** Mines-Telecom

On pourra dans cet exercice utiliser le résultat suivant : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + xn^2}$.

2. Calculer $S(1)$.
3. La fonction S est-elle continue sur D ?
4. Déterminer des équivalents simples de S aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Exercice 209. *** Mines-Pont

1. Montrer qu'il existe une unique application f de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0.$$

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 210. *** TPE-EIVP

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) = \ln(2)$.

Exercice 211. *** Mines-Pont

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n e^{-|x-n\pi|}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur \mathbb{R} .
2. Étudier la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment de \mathbb{R} .
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur \mathbb{R} .

Exercice 212. *** TPE-EIVP

1. Montrer que : $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \ln \left(1 + \frac{t}{2} \right) \leq \frac{t}{2}$ et $-t \ln(2) \leq \ln \left(1 - \frac{t}{2} \right) \leq 0$.

2. Montrer qu'on peut définir sur $] - 1, 1[$ des fonctions f_n par :

$$f_0 : x \mapsto x \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1} : x \mapsto \ln \left(1 - \frac{f_n(x)}{2} \right).$$

3. Étudier la convergence simple sur $] - 1, 1[$ de la série $\sum f_n$.

4. Montrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $] - 1, 1[$.

Exercice 213. *** Mines-Pont

On se place dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit F l'ensemble des fonctions de E qui sont monotones sur E .

Déterminer l'intérieur de F .

Exercice 214. *** Mines-Pont

Soit une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ et non presque sûrement nulle.

Montrer que, pour tout $a \in]0, 1[$, on a :

$$PX \geq a \mathbb{E}(x) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 215. *** CCINP

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n , et soit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de B en fonction de celui de A .

- Calculer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A .
- Soient U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et soit $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$; déterminer une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour que W soit un vecteur propre de B .
- Montrer que, si A est diagonalisable et inversible alors B est diagonalisable.
- Étudier la réciproque de la propriété établie à la question précédente.

Exercice 216. *** Centrale

Soit une fonction f continue et décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

On suppose de plus que f est de limite nulle en $+\infty$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) dt$.

- Déterminer la nature de $\sum u_n$.
- Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$.
- Donner un exemple de fonction g continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telle que $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t) \sin(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} g(t) \sin(t) dt$ diverge.

Exercice 217. *** IMT

Soit G un groupe multiplicatif tel que $\phi : x \mapsto x^n$ soit un automorphisme de G (où $n \geq 2$).

Soit $C = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$.

Montrer que, pour tout $x \in G$ on a $x^{n-1} \in C$.

indication : on pourra commencer par montrer que : $\forall (x, y) \in G^2, x^{n-1}y^{n-1} = (yx)^{n-1}$.

Exercice 218. *** Mines-Pont

Soit G un groupe abélien non réduit à $\{e\}$ (où e est l'élément neutre).

On dit que G est simple si ses seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G .

Montrer que G est simple si, et seulement si, il est cyclique de cardinal premier.

2.4 Exercices difficiles

Exercice 219. *** IMT

Soit $q \in]-1, 1[$.

- Montrer qu'il existe une unique fonction f définie et continue sur $]0, 1[$ telle que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx)$.
- Montrer que f est développable en série entière en précisant le rayon de convergence.

Exercice 220. *** Saint-Cyr

On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} dt$

- Montrer que I converge.
- Montrer que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$.
- Montrer que $\forall n \geq 1$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \ln(n) + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(u) du$.
- Calculer I .

Exercice 221. ★★★ CCINP

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto n \cos(t)^n \sin(t)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Soit a tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Soit g une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)g(t)dt \right) = g(0)$.

Exercice 222. ★★★ Mines-Pont

Soient f et g deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que g ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Soit (E) l'équation différentielle $y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- A. f est impaire et g est paire.
- B. (E) admet sur \mathbb{R} une solution paire non nulle et une solution impaire non nulle.

Exercice 223. ★★★ IMT

Pour $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+xn^2)} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$.
3. Déterminer un équivalent de I_n . (*Remarque de M. Denizet : cette question me parait étonnamment difficile mais peut-être une méthode simple m'a-t-elle échappé.*)

Exercice 224. ★★★ X

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $S = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $0 \in \overline{S}$.

Exercice 225. ★★★ ENS

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et soit K un compact de E .

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K .
2. On suppose de plus que E est euclidien, montrer qu'il y a unicité de la boule fermée de rayon minimal contenant K .
3. Proposer un exemple où il n'y a pas unicité de de la boule fermée de rayon minimal contenant K .

Exercice 226. ★★★ Mines-Pont

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que F soit distinct de E , montrer que :

$$\forall r \in]0, 1[, \exists x \in E \text{ tel que } \|x\| = 1 \text{ et } d(x, F) \geq r.$$

2. Soit B la boule unité de E , montrer que B est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie.

Exercice 227. ★★★ X

Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel fermé de E et soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Exercice 228. ★★★ ENS

1. Soit P un polynôme réel unitaire, de degré $n \geq 1$ et scindé sur \mathbb{R} .
Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que $P_a = P + aX^{n+1}$ soit scindé sur \mathbb{R} .
2. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ admette exactement n racines réelles.

Exercice 229. ★★★ ENS

Soit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} si, et seulement si, l'image par f de tout segment est un segment et l'image réciproque par f de tout singleton est un fermé.

Exercice 230. ★★★ Mines-Pont

Soit un réel $a > 0$ et soit $A = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = a \right\}$.

Déterminer $B = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \right\}$.

Exercice 231. ★★★ Mines-Pont

Soit F une fraction rationnelle complexe telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F , on a $F(n) \in \mathbb{Q}$.
Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

On pourra raisonner par récurrence.

2.5 Exercices très difficiles

Exercice 232. ★★★★★ ENS

Soit E un espace vectoriel normé, soit K un compact non vide de E et soit f une application de K dans K .

1. On suppose que f est une isométrie de E , montrer que f est surjective.
2. On suppose que f est surjective et 1-lipschitzienne, montrer que f est une isométrie.

Exercice 233. ★★★★★ X

On note D l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le but de cet exercice est de déterminer l'intérieur de D .

On pose $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{card}(\text{Sp}(A)) < n\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{E}$, montrer que $A \notin \overset{\circ}{D}$.
2. Montrer que \mathcal{E} est fermé.
3. Conclure.