M.P. – Préparation à l'oral 2025

1 Exercices posés lors de la session 2024

1.1 Exercices plutôt faciles

Exercice 1. ENSEA *Gabriel Osypchuk* *

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$.

Exercice 2. IMT *Maxence Menu* *

Soit $n \geq 1$, on dispose de n boules numérotées de 1 à n, et n urnes dans lesquelles on peut mettre de 0 à n boules. Chaque boule est mise dans une urne avec équiprobabilité et indépendamment des autres boules.

On note p_n la probabilité qu'il y ait exactement une boule dans chaque urne.

1. Calculer p_n.
2. Montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ décroit et converge.
3. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3. IMT *Thomas Peronne* *

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $(E) : \begin{cases} x' &= x+4y-2z \\ y' &= x+y-z \\ z' &= -x-2y \end{cases}$.

1. Montrer que -1 est valeur propre de A.
2. Résoudre (E).

Exercice 4. IMT *Thomas Peronne* *

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. Pour quels entiers n, I_n est-elle définie.
2. On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n)$.
3. En déduire le comportement de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. IMT *Raphaël Schneider* *

Soient deux réels a et b avec $n \neq 1$, étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+b^n}$.

Exercice 6. IMT *Raphaël Schneider* *

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour tous P et Q dans E on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire sur E et déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire

Exercice 7. IMT *Elliot Picavet* *

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
   Indication : on pourra distinguer les cas $a = b$ et $a \neq b$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 8. CCINP *Raphaël Schneider* *

Soit $n \geq 2$ et soit $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} = 1$ et donner l'ensemble des racines complexes de P_n.
2. Montrer que $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$.
3. Calculer $P(1)$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 9. IMT *Gabriel Osypchuk* *

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ u$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que u est vecteur propre de ϕ relativement à λ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(f - \lambda Id)$.

Exercice 10. IMT *Gabriel Osypchuk* *

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\int_0^1 \exp(t)\ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!\, n}$.

Exercice 11. IMT *Benjamin Prugnaud* *

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^4 = 4M^2$ et $\{-2, 2\} \subset \mathrm{Sp}(M)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 12. IMT *Sophie Boulet* *

Soit E un espace vectoriel de dimension 7 et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $\pi_u = X^2$.

1. Que vaut χ_u ?
2. Montrer que $\dim(\ker(u)) \in \{4, 5, 6\}$.

Exercice 13. CCINP *Alexis bavouzet* *

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f : x \mapsto \int_0^1 t^k \sin(xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x)$. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle dont f est solution en précisant le rayon de convergence.

1.2 Exercices moins faciles

Exercice 14. IMT *Maxence Menu* **

Soit I un idéal d'un anneau commutatif A.
On note $\mathcal{B}_I = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_I$ est un idéal de A.
2. Décrire les idéaux de $\mathbb{Z}$.
3. Pour I un idéal de $\mathbb{Z}$, déterminer $\mathcal{B}_I$ en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.

Exercice 15. ENSEA *Thomas Peronne* **

On pose $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier le sens de variation de S.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Donner un équivalent de S en $+\infty$
5. Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 16. CCINP *Maxence Menu* **

On suppose que pour n $\in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir n est $\frac{1}{2^n}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "être un multiple de k ".
2. Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.
4. On note B l'événement "être un nombre premier"
   et C $= (\{1\} \cup A_2 \cup A_3) \backslash \{2, 3\}$
   Montrer que $C \subset \overline{B}$
5. Montrer que $\dfrac{13}{32} < P(B) < \dfrac{209}{504}$.

Exercice 17. CCINP *Thomas Peronne* **

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \leq t$.
2. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|F(x)| \leq \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}x}}{x}$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ sans signe intégrale.
5. Déterminer la limite de F en $-\infty$.

Exercice 18. CCINP *Benjamin Prugnaud* **

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite converge-t-elle ?
3. Déterminer un réel α tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite dans $\mathbb{R}^*$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 19. ENSEA *Thomas Peronne* **

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1\}$ et telle que $P(Y = 1) = p \in]0,1[$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi.
Soit $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $X_1 + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$. Déterminer la probabilité que A soit inversible.
2. On suppose que X_1 suit la loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 20. IMT *Alexandre Guechtouli* **

On considère n urnes et N boules avec $N = kn$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
Chaque boule est envoyée dans une urne avec équiprobabilités entre les urnes.
On note Y le nombre d'urnes vides.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer la limite de $P(y = j)$ quand k tend vers $+\infty$ puis déterminer un équivalent de $P(y = j)$ quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 21. ENSEA *Alexandre Guechtouli* **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et soit C_A l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

1. Déterminer χ_A et π_A.
2. Déterminer C_A en précisant sa dimension.

Exercice 22. IMT *Alexis Bavouzet* **

On considère la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que cette série converge.
2. Calculer la somme de cette série.
   Indication : on pourra calculer les sommes partielles d'ordre pair

Exercice 23. IMT *Elliot Picavet* **

Soient $p \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que X suive la loi de Bernouilli de paramètre p et Y suive la loi de Poisson de paramètre λ.

On pose $Z = XY$.

1. Vérifier que l'espérance de Z existe et la calculer.
2. Vérifier que la variance de Z existe et la calculer.
3. Calculer la loi de Z, préciser $P(Z = 26)$.

Exercice 24. IMT *Nina Mirwasser* **

Dans cet exercice, on pourra librement utiliser que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

On pose $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + n^4}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
3. Déterminer un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
4. Justifier l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}$.

Exercice 25. Navale *Elliot Picavet* **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre ces deux assertions :

(1) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad Tr(MAB) = Tr(MBA)$

(2) M est une matrice d'homothétie (ie. $M = \lambda I_n$)

Exercice 26. CCINP *Émilie Zheng* **

Soit un espace euclidien E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x) | x \rangle = 0$.

1. Montrer que $u^* = -u$.
   Que peut-on en déduire quant à la matrice de u dans une base orthonormale de E.
2. Montrer que $\ker(u)^{\perp}$ est stable par u.
3. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et une matrice inversible N telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ s'écrive par blocs : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 27. CCINP *Elliot Picavet* **

On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier les variations de f.
2. Justifier que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \cos(t) \leqslant 1$.
   Montrer que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 28. CCINP *Lucie Dai* **

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

Pour tout $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle .|.\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
   Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires dans E.

Exercice 29. CCINP *Amélie Wendelbo* **

On admet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{ch}(xt)$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{ch}(xt)\mathrm{d}t$, F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F.
4. Déterminer F.

Exercice 30. CCINP *Gabriel Osypchuk* **

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'on a définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On note $\| \ \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
2. On pose $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0)$.
   Montrer que ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Montrer que ϕ n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$.
   Indication : on pourra utiliser la suite $((X-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Montrer qu'il n'existe pas de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P) = \langle P|Q\rangle$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on se place maintenant sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = \langle P|Q\rangle$?

Exercice 31. IMT *Benjamin Prugnaud* **

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g.
2. Étudier les convergences normales et uniformes de f et g.
3. Étudier la continuité de f et de g.
4. Déterminer une relation entre f et g.

Exercice 32. IMT *Ophélie Samou* **

Combien y-a-t-il d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Exercice 33. IMT *Amélie Wendelbo* **

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \oplus \ker(f) = E$.
2. On suppose de plus que E de dimension finie, montrer que f et g ont même rang.

1.3 Exercices plutôt difficiles

Exercice 34. IMT *Alexis Bavouzet* ***

On considère quatre points distincts A, B, C et D.

On se trouve initialement en A et on se déplace par étapes entre les points :

— si on est en A on va en B avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en D avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et on reste en A avec la probabilité $\frac{1}{6}$;

— si on est en B on va en C avec $p = \frac{1}{2}$, en A avec $p = \frac{1}{3}$ et on reste en B avec $p = \frac{1}{6}$;

— si on est en C, on va en D avec $p = \frac{1}{2}$, en B avec $p = \frac{1}{3}$ et on reste en C avec $p = \frac{1}{6}$;

— si on est en D, on va en A avec $p = \frac{1}{2}$, en C avec $p = \frac{1}{3}$ et on reste en D avec $p = \frac{1}{6}$.

On note a_n la probabilité d'être en A à l'issue du n–ième déplacement, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)$,

Exercice 35. IMT *Ophélie Samou* ***

Soit un réel α, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n |ln(1-t)|^\alpha \mathrm{d}t$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de α la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   On se place désormais dans ce cas.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

Exercice 36. Saint Cyr *Elliot Picavet* ***

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que A_1 et A_2 sont diagonalisable et donner leurs valeurs propres.
2. Montrer que $\forall n \geq 2, \forall X \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$:
$$\langle A_n X | X\rangle = \langle X|X\rangle + \sum_{i=2}^{n}(x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})^2$$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est inversible.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres de A_n sont supérieures ou égales à 1. Sont-elles strictement supérieures à 1 ?

Exercice 37. IMT *Amélie Wendelbo* ***

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Justifier la continuité de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que f n'est pas dérivable en 0 *(cette question nettement plus difficile a été évoquée mais n'a en fait pas été traitée durant l'oral).*

Exercice 38. Navale *Elliot Picavet* ***

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On note $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

1. Montrer que N_1 est une norme.
2. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, N_1(f_{n+k} - f_n) < \varepsilon$$

   Montrer que la convergence au sens de N_1 implique que la suite est une suite de Cauchy.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
   Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy.
   Cette suite converge-elle dans (E, N_1) ?

Exercice 39. CCINP *Nina Mirwasser* ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & O_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2. Montrer que si v est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie alors $\dim(\ker(v^2)) \leq 2\dim(\ker(v))$.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ de rang $2n$ et vérifiant $B^3 = 0$.
   On note v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
   (a) Déterminer le rang de v^2.
   (b) Soit S un supplémentaire de $\ker(v^2)$ et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de S, montrer que la famille $(v^2(e_1), \ldots, v^2(e_p), v(e_1), \ldots, v(e_p), e_1, \ldots, e_p)$ est libre.
   (c) Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 40. Centrale *Ophélie Samou* ***

Soit $D =]0,1[^2$ et soit f définie sur D par $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
2. Déterminer les extrema locaux de f.
3. Déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 41. Centrale *Éléonore Nifle* ***

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit V un sev de E de dimension k.

Soit p_V le projecteur orthogonal sur V et soit P la matrice canoniquement associé à p_V.

On note $P = A + D$ où D est diagonale et A est de diagonale nulle.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi donnée par :

$P(X_i = -1) = P(X_i - 1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et on note $R = d(X, V)$.

1. Montrer que $0 \leq R \leq \sqrt{n}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $d(x, V)^2 = \|x\|^2 - \langle x | p_V(x) \rangle$.
3. Montrer que $R^2 = n - k - X^T AX$ et en déduire l'espérance de R^2.

Remarque : énoncé incomplet

Exercice 42. Centrale Python *Éléonore Nifle* ***

On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(P_k) = X^k$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par, on note u_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par u.
3. Avec Python
   (a) Écrire une fonction M qui prend n en argument et renvoie la matrice M_n canoniquement associée à u_n.
   (b) Afficher les valeurs propres et vecteurs propres de u_n pour $n \in [\![2, 5]\!]$.
   (c) Conjecturer les valeurs propres de u_n.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de M_n sont dans $\mathbb{Z}$.
5. Montrer la conjecture sur les valeurs propres de u_n.
6. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 43. Saint Cyr Python *Elliot Picavet* ***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $a_1 = 1$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \sum_{p=1}^{n} a_p \quad \text{et} \quad A_n = \ln \left(\sum_{p=1}^{n} a_p \right)$$

1. Écrire une fonction Python calculant a_n avec une complexité temporelle en $\mathcal{O}(n)$.
2. Écrire un code Python permettant de calculer une approximation de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   Tester cette fonction pour $\alpha = 2$ et pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
3. Donner la nature de la série $\sum (A_{n+1} - A_n)$ en fonction de la valeur de α.

4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum a_n$ est-elle convergente ?
5. Préciser la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $\alpha = 1$.

2 Exercices antérieurs

2.1 Exercices plutôt faciles

Exercice 44. CCINP *

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en expliquant comment les trouver.
2. Soit $u : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T$, justifier rapidement que $\det(u) \neq 0$ puis calculer explicitement le déterminant de u.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\ker(A^T A) = \ker(A)$.
   Remarque : cette question est indépendante de la précédente.

Exercice 45. IMT *

Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 46. IMT *

Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = \mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{-3x}$.

Exercice 47. IMT *

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 48. IMT *

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Énoncer le théorème de Cayley Hamilton
2. Calculer χ_A en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Résoudre le système $\begin{cases} x' & = & x - y \\ y' & = & 2x + 4y \end{cases}$.

Exercice 49. CCINP *

On considère l'équation différentielle (E) : $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.
Déterminer une solution de (E) développable en série entière et valant 1 en 0.

Exercice 50. CCINP *

soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer χ_A.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A et vérifier que u_1 et u_2 sont vecteurs propres de A.
3. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre et en déduire une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

4. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 51. IMT *

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, en tout point, la tangente à la courbe de f dans un repère orthonormé passe par l'origine de ce repère.

Exercice 52. CCINP *

On pose $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant déterminer le degré de $\Delta(P)$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n[X]$ est stable par Δ.
3. Déterminer le noyau de Δ et montrer que Δ est surjective.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

Exercice 53. CCINP *

Soient T et Y deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que T suit la loi binomiale de taille $2n$ et de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et que Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

On pose $X = T - n$ et $Z = XY$.

1. X et T sont-elles indépendantes ?
   X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Montrer que X et Z suivent la même loi. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Que vaut l'espérance de Z ?

Exercice 54. IMT *

Soit E un espace euclidien et soient a et b deux vecteurs de E non colinéaires.
Soit $u : x \mapsto \langle a|x\rangle\, a + \langle b|x\rangle\, b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Déterminer les sous-espaces propres de u.

Exercice 55. IMT *

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe un réel a tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{a}{n 2^n}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Montrer que X admet une variance et calculer cette variance.
4. Déterminer la fonction génératrice de X et retrouver l'espérance et la variance de X.

Exercice 56. TPE/EIVP *

On considère un meuble à huit tiroirs numérotés de 1 à 8.

Un trousseau de clefs a la probabilité d'être dans ce meuble, et que chaque tiroir a la même probabilité de contenir ce trousseau.

Quelle est la probabilité que le trousseau de clefs soit dans le tiroir numéro 8 ?

On a examiné sans succès les tiroirs numérotés de 1 à 7, quelle est la probabilité que le trousseau de clefs soit dans le tiroir numéro 8 ?

Exercice 57. TPE/EIVP *

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

On pose $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 58. CCINP *

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x))$.

Exercice 59. CCINP *

Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}} \mathrm{d}t$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (I_n)$.

Exercice 60. CCINP *

Soit $A = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & . \\ 3 & 6 & . \\ -2 & . & . \end{pmatrix}$.

Remplir la matrice A de telle sorte que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ puis déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Exercice 61. IMT *

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2)$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 62. IMT *

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = (-1)^{n-1} + (n+1)2^{n-2}$.

Exercice 63. IMT *

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

1. A est elle diagonalisable ? A est elle inversible ?
2. Déterminer le rang de B. B est elle diagonalisable ?

Exercice 64. IMT *

Existe-t-il une matrice A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^{\mathrm{T}} = I_3$?

Exercice 65. IMT *

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe et calculer sa valeur.

Exercice 66. IMT *

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n - M$.

Montrer que son déterminant est strictement positif.

Exercice 67. IMT *

On lance une pièce de monnaie ayant une probabilité p de faire "pile".

On pose N le nombre de lancers nécessaire pour obtenir "pile" pour la première fois.

Ensuite, on lance la pièce N fois et on compte le nombre de fois X où on obtient "pile".

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 68. IMT *

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 2$.

On tire on hasard et avec remise A et B des parties de E, les deux tirages étant successifs et indépendants.

Calculer la probabilité que $\mathrm{card}(A \cap B) = 1$.

Exercice 69. IMT *

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donner une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP$.

Exercice 70. IMT *

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$

   Déterminer un équivalent de t_n quand n tend vers $+\infty$.

2.2 Exercices moins faciles

Exercice 71. CCINP **

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$.
Soit (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires.
Soit $f : x \in E \mapsto (a|x)a + (x|b)b$.

1. Montrer que $a+b$ et $a-b$ engendrent des sous espace orthogonaux.
2. Montrer que f est un endomorphismes symétrique.
3. Déterminer le noyau et l'image de f, préciser leurs dimensions.
4. Calculer $f(a+b)$.
5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 72. CCINP **

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et calculer ensuite f.

   Remarque : on pourra utiliser le fait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Exercice 73. CCINP **

Pour $X \in \mathbb{R}^n$ on définit $\|X\|_2 = \sqrt{X^T X} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.
2. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme $|||.|||$ subordonnée à $\| \ \|_2$.
   (a) Rappeler la définition de cette norme $|||.|||$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||A||| \leq \max\left\{\sqrt{a} \mid a \in \mathrm{Sp}(A^T A)\right\}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||A||| = \max\left\{\sqrt{a} \mid a \in \mathrm{Sp}(A^T A)\right\}$.

Exercice 74. CCINP **

On étudie l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si M vérifie cette équation alors M est diagonalisable.
2. Résoudre cette équation.

Exercice 75. IMT **

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 76. IMT **

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Exercice 77. CCINP **

Soit $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x) cos(x)$

1. Sans expliciter le développement en série entière montrer que f est développable en série entière et donner le rayon de convergence.
2. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Donner a_0, a_1, a_2, a_3.
3. Calculer $f^{(4)}$ et montrer que f vérifie une équation différentielle à coefficients constants.
4. Calculer a_4 puis trouver une relation de récurrence sur les a_n.
   Expliciter le développement en série entière de f.

Exercice 78. IMT **

On considère une urne comportant 3 boules blanches et 7 boules noires. On fait une succession de tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui correspond au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On note Y la variable aléatoire qui correspond au rang d'apparition de la troisième boule blanche. Donner la loi de Y

Exercice 79. IMT **

On définit l'endomorphisme T de $\mathbb{C}[X]$ par $T : P \mapsto (-3X+8)P + (5X^2+X)P' - 2(X^3 - X^2)P''$.

1. Soit P de de degré $n \in \mathbb{N}$, déterminer le coefficient de degré $n+1$ de $T(P)$. En déduire que tous les vecteurs propres de T ont même degré.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T et donner la matrice canoniquement associé à l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ induit par T.
3. Déterminer les valeurs propres de T et préciser les dimensions des sous-espaces propres associés.

Exercice 80. IMT **

1. Soit une série numérique $\displaystyle\sum_{u_n}$,énoncer une condition nécessaire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série $\displaystyle\sum_{u_n}$ converge. Justifier ce résultat.
2. La condition précédente est-elle suffisante ? Justifier.
3. Étudier, en fonction des réels a et b la nature de la série $\displaystyle\sum_{u_n}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Exercice 81. IMT **

1. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et énoncer le théorème de continuité des suites de fonctions.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$.
   (a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ où $a > 1$.

Exercice 82. IMT **

On lance n fois une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de faire pile.

On note X le nombre de piles effectués et Y le nombre de lancers identiques au premier (celui-ci compris).

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de Y.
4. Déterminer la fonction génératrice de Y, en déduire son espérance et sa variance.

Exercice 83. IMT **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 + I_n$ montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 84. IMT **

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Quels sont les entiers n pour lesquels u_n existe ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et exprimer sa somme comme une intégrale.

Exercice 85. CCINP **

Soit E un espace euclidien

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$, montrer que $u = 0$.
2. Soit p un projecteur de E, montrer que $p \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, p est un projecteur orthogonal.
3. Soient $u_1, \ldots, u_q$ dans $\mathcal{S}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, $\langle u_1(x)|x\rangle + \cdots + \langle u_q(x)|x\rangle = \langle x|x\rangle$ et pour $i \neq j$ $u_i \circ u_j = 0$. Montrer que $u_1, \ldots, u_q$ sont des projecteurs orthogonaux.

Exercice 86. CCINP **

Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{O}(E)$, on pose $F = \ker(u - Id)$ et $G = \ker(u^2 + Id)$.

1. Montrer que G est stable par u
2. Montrer que F et G sont orthogonaux.

   On suppose désormais que le polynôme $P = (X-1)(X^2+1)$ annule u.
3. L'isométrie u est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
4. Montrer que $E = F \oplus G$ et préciser la forme de la matrice de u dans une base orthonormale de E adaptée à cette somme directe.

Exercice 87. Mines-Pont **

Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n = 0$.

Exercice 88. Mines-Pont **

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) + \mathrm{e}^t \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$.

Exercice 89. CCINP **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice p–nilpotente (où $p \in \mathbb{N}^*$).

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Montrer que $\det(A + I_n) = 1$.
3. On considère une matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec A.
   (a) Que dire de AM^{-1} ?
   (b) Montrer que $\det(A + M) = \det(M)$.
   (c) L'égalité précédente est-elle vraie pour toute matrice M inversible ?
   (d) L'égalité précédente est-elle vraie pour toute matrice M qui commute avec A ?

Exercice 90. CCINP **

Soient $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions.
2. Étudier les convergence normales et uniformes des séries de fonctions considérées sur $]0, +\infty[$ pour F et sur $]1, +\infty[$ pour ζ.
3. Prouver que F et ζ sont continues sur leurs ensembles de définition.
4. Déterminer une relation entre F et ζ.
5. En déduire que $\zeta(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Exercice 91. CCINP **

1. Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $ab > 0$ ou $a = b = 0$.
2. Soit n un entier pair non nul, soient des réels $a_1, \dots, a_n$ et soit la matrice A définie par
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \diagup & \diagup & 0 \\ 0 & a_2 & \diagup & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
   Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
   (a) Déterminer des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stables par u.
   (b) Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k a_{n+1-k} > 0$ ou $a_k = a_{n+1-k} = 0$.

Exercice 92. CCINP **

Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $a_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum a_n$.

   Indication : on pourra chercher un équivalent de $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 93. CCINP **

Soient X et Y deux variables aléatoires entières dont la loi conjointe est donnée par

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dbinom{j}{i} \dfrac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-2\lambda} & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. Soit $j \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $[Y = j]$.

   Calculer son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X et Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 94. CCINP **

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \dfrac{\ln(1 + n^2x^2)}{n^3}$.

On note S la somme de la série $\sum f_n$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner $S'(x)$ comme somme d'une série.
3. Montrer que S est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 95. CCINP **

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} \mathrm{e}^{-(n+1)x}$.

1. Étudier les convergences simples, uniformes et normales de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $F : x \mapsto \mathrm{e}^x S(x)$.

   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ puis en déduire $F(x)$ et $S(x)$.

Exercice 96. CCINP **

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.
2. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$.

   Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. On admet que f est continue en 0, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
5. Ajout de M. Denizet pour les plus ambitieux : montrez la continuité de f en 0.
(Cette question est nettement plus difficile que les précédentes.)

Exercice 97. IMT **

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures.

Exercice 98. IMT **

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$;

1. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
2. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = 0$, montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$.
3. Généraliser.

Exercice 99. IMT **

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 100. IMT **

On note D_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que D_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.
2. Soit $M \in D_n$ à coefficients diagonaux distincts deux-à-deux.
Montrer que $(I_n, M, \ldots, M^{n-1})$ est une base de D_n.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer si A, B et $A+B$ sont diagonalisables.
4. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 101. IMT **

On pose $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et étudier sa convergence.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \left(1 - \alpha \dfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.
4. Quelle-est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 102. IMT **

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que, pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $f(x + t, y + t) = f(x, y)$.
   Monter que $\partial_1 f + \partial_2 f = 0$.
2. Étudier la réciproque du résultat précédent.

Exercice 103. IMT **

Pour $x \in]-1, +\infty[$, on pose $I_x = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_x est bien défini pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
2. Calculer I_x pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Exercice 104. IMT **

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'intervalle de définition de f.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.
3. Donner une expression simplifiée de f.

Exercice 105. TPE/EIVP **

Soit a un vecteur unitaire d'un espace euclidien E.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $f_\lambda : x \in E \mapsto x + \lambda \langle x|a\rangle a$.
On pose $\mathcal{A} = \{f_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par composition et que la composition y est commutative.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$,calculer f_λ^p.
3. Montrer que f_λ est injective si, et seulement si, $\lambda \neq -1$. Qu'est-ce que f_{-1} ?
4. Montrer que $f_\lambda \in O(E)$ si, et seulement si, $\lambda \in \{0, -2\}$. Qu'est-ce que f_{-2} ?

Exercice 106. TPE/EIVP **

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2 et soit $(x, y) \in E^2$ tel que $y \neq 0$, $x \neq y$ et $\langle x|y\rangle = \|y\|^2$.

Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $p_H(x) = y$ où p_H est le projecteur orthogonal sur E.

Exercice 107. TPE/EIVP **

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, τ, P).
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on note G_X la fonction génératrice de X.

1. Montrer que, pour tous $r \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq n) \leq \dfrac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 108. Mines-Pont **

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

Exercice 109. CCINP **

Soient $X_1, \ldots, X_n$ (où $n \geq 2$) des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = X \times X^{\mathrm{T}}$.

1. Déterminer les lois de probabilité de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Déterminer la probabilité que M soit une matrice de projection.
3. On se place dans le cas où $n = 3$, on pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = V^{\mathrm{T}} M V$.

   Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 110. CCINP **

Soit $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 | 1 - x - y \geq 0\}$ et soit $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$.

1. Représenter le domaine D. D est-il ouvert ? D est-il fermé ?
2. Montrer que f admet un maximum sur D et déterminer ce maximum.

Exercice 111. CCINP **

Soit $n \geq 2$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = 1 \text{ et } i \geq 2 \\ 1 & \text{si} \quad j = n \text{ et } i \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Quels sont les rangs de A et A^2 ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

   $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Préciser les traces de B et B^2.
3. Quel est le spectre de B ? f est-il diagonalisable ?

Exercice 112. CCINP **

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $\ker(f - Id)$ et $\ker(f - Id)^2$.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 113. CCINP **

Une pièce de monnaie A a la probabilité $p \in]0,1[$ de faire « pile ». Une pièce de monnaie B a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ de faire « pile ». On lance la pièce A jusqu'à faire pile et on appelle N le nombre de lancers effectués. On lance alors N fois la pièce B et on note X le nombre de piles effectués.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X sachant $[N = n]$.
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 114. CCINP **

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

On note S la somme de la série $\sum u_n$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer que S est dérivable sur D.

Exercice 115. CCINP **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.
2. On suppose que $\sum v_n$ converge.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-v_k) = \dfrac{u_0}{S_n}$.
   (b) La série de terme général $\ln(1-v_n)$ converge-t-elle ?
   (c) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 116. CCINP **

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in]n, +\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$.

On fixe par ailleurs un réel strictement positif a.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de f_n et montrer que l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution que l'on note désormais α_n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (f_n(n+1))$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{\alpha_n-n}^{\alpha_n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq a \leq \int_{\alpha_n-n-1}^{\alpha_n} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.

Exercice 117. CCINP **

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \dfrac{1}{2}(X^2-1)P''(X) - XP'(X) + P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 3$.
   Déterminer la matrice canoniquement associée à f.
   Montrer que f est un projecteur, préciser son noyau et son image.

3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et montrer que
   $\text{Im}\,(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(1) = P'(-1) = 0\}$.
4. Déterminer les valeurs propres de f.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 118. CCINP **

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathcal{E}_a = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ paire et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a+x)\right\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{E}_a$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f + f'' = 0$.
2. Déterminer $\mathcal{E}_a$.
3. Déterminer $\mathcal{F}_a = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ impaire et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a+x)\right\}$.

Exercice 119. CCINP **

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner l'équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par u.

Exercice 120. CCINP **

Soit un espace euclidien E sur lequel le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle$ et la norme est notée $\|\ \|$. Soit p un projecteur non nul de E.

1. Justifier l'existence de la valeur $M_p = \displaystyle\max_{x \in E, \|x\|=1} \|p(x)\|$.
2. On suppose qu'il existe $(x, y) \in \ker(p) \times \text{Im}\,(p)$ tel que $\langle x|y \rangle \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|p(x + ty)\| > \|x + ty\|$.
3. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $M_p = 1$.

Exercice 121. CCINP **

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs propres de f relatifs à ses n valeurs propres distinctes, et soit $w = v_1 + \cdots + v_n$.

1. Montrer que la famille $(f^k(w))_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est une base de E.
2. Montrer que l'ensemble F des polynômes en f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\,(E)$ dont $(f^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est une base.

Exercice 122. CCINP **

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développables en série entière sur $\mathbb{R}$.
Soit G l'ensemble des fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\exists f \in F \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^4 f(x).$$

Enfin, on note H l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F, lequel est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que H est sous-espace vectoriel de F et que G et H sont supplémentaires dans F.

3. On note p le projecteur de F sur H parallèlement à G.
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
Montrer que $f \in F$ et déterminer $p(f)$.

Exercice 123. IMT **

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}_7[X]$ tels que $(1 - X)^4$ divise $P(X) + 1$ et $(1 + X)^4$ divise $P(X) - 1$.

Exercice 124. IMT **

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n.

On appelle « système générateur positif » de E toute famille de vecteurs qui génère tous les éléments de E et tel que tous les éléments de E peuvent être générés par ce système en utilisant uniquement des coefficients positifs.

Montrer que E admet au moins un « système générateur positif » et que tout « système générateur positif » est de cardinal strictement supérieur à n.

Exercice 125. Mines Ponts **

1. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules sans remise. Déterminer la probabilité d'obtenir la boule numéro 1 au k –ième tirage.
2. A présent, on considère qu'il y a m boules rouges parmi les n, et $n - m$ boules blanches. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge au k–ième tirage.

Exercice 126. Centrale **

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1 - t^2} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle tend vers 0.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4} a_n$, en déduire un équivalent de $a_n a_{n+1}$ puis un équivalent de a_n.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \mathrm{d}t$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$.

Exercice 127. Centrale **

On lance une pièce de monnaie équilibrée une infinité de fois.

On considère les événements :

P_k : "obtenir pile au k-ième lancer"

F_k : "obtenir face au k-ième lancer".

On note :

L_1 la variable aléatoire comptant le nombre de lancers dans la première série de lancers identiques ;

L_2 la variable aléatoire comptant le nombre de lancers dans la seconde série de lancers identiques.

Par exemple, si la suite des lancers est PPFFFPFP..., alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 3$.

1. (a) Calculer $PL_1 = k$ en exprimant l'événement $[L_1 = k]$ à l'aide des P_i et des F_i.

(b) Calculer $G_{L_1}(t)$ et en déduire l'espérance de L_1.

(c) Calculer $PL_2 = l$. Est-ce-que L_1 et L_2 suivent la même loi ?

2. A présent, on effectue seulement n lancers consécutifs de pile ou face, avec $n \geq 2$. La variable L_1 est toujours définie de la même façon (par contre, L_2 n'est pas toujours définie).

   (a) Calculer $PL_1 = n$ et $PL_1 = k$ pour $1 \leq k \leq n$.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k$.

   (c) Calculer $\mathbb{E}(L_1)$ en fonction de n.

Exercice 128. Centrale **

Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $S(1)$ et déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.
5. Déterminer un développement asymptotique de S à l'ordre 3 en $+\infty$.

2.3 Exercices plutôt difficiles

Exercice 129. CCINP ***

Soit E un espace vectoriel normé, on pose $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

1. Calculer $\|f(x)\|$ pour $x \in E$.
2. Montrer que f est bijective de E dans $\mathcal{B}_o(0,1)$.
3. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 130. CCINP ***

Soient X et Y deux VAD, indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.

On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = |X - Y|$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$.
2. En déduire que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre ; préciser l'espérance de U.
3. Donner la loi de V et son espérance.
4. Montrer que U et V sont indépendantes.

Exercice 131. Mines-Pont ***

Soit A un anneau commutatif, un idéal I de A est dit premier lorsque :
$\forall (a,b) \in A^2$, $ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

1. Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
2. Soit P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est un idéal premier.

3. Un idéal I de A est dit maximal s'il est distinct de A et si tout idéal J de A qui contient I est égal à I ou à A.

   Déterminer les idéaux maximaux de Z
4. Montrer que tout idéal maximal est premier.

Exercice 132. CCINP ***

Soit E l'équation fonctionnelle suivante : $f'(2x) = -2\sin(x)f(x)$

1. Déterminer une solution particulière à E.
2. On pose $f(0) = \lambda$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.
3. Montrer que toute solution de E est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.
4. En déduire l'ensemble des solutions de E.

Exercice 133. CCINP ***

Soit E un espace vectoriel et soient p et q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}\,(p) \subset \ker(q)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \{0\}$.
2. On considère $r = p+q-p\circ q$, montrer que r est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)\oplus\mathrm{Im}\,(q)$ parallèlement à $\ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 134. IMT ***

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on cherche à résoudre $\exp(M) = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si M est solution alors M admet une unique valeur propre et que celle-ci est de la forme $ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Préciser une condition nécessaire sur k.
2. Montrer que si M est solution alors M est triangulaire.
3. Conclure.

Exercice 135. Mines Pont ***

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et à valeurs propres positives.

1. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique et à valeurs propres positives telle que $R^2 = A$.
2. On suppose pour cette question que A est inversible, montrer que $R^{-1}BR^{-1}$ est symétrique à valeurs propres positives.
3. Montrer que $\det(I_n + B) \geq 1 + \det(B)$.
4. Montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Exercice 136. TPE/EIVP ***

Soit $n \geq 3$ et soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.

1. Quel est le cardinal de G ?
2. Montrer que $5^{2^{n-3}} \equiv 2^{n-1} + 1\ [2^n]$.
3. En déduire l'ordre de 5 dans G.

Exercice 137. TPE/EIVP ***

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2 et soit $(x, y) \in E^2$ tel que $y \neq 0$, $x \neq y$ et $\langle x|y\rangle = \|y\|^2$.

Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $p_H(x) = y$ où p_H est le projecteur orthogonal sur E.

Exercice 138. TPE/EIVP ***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \arctan\left(\sqrt{n+x}\right) - \arctan\left(\sqrt{n}\right)$.

1. Étudier l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n(n)$.
3. En déduire la limite de S en $+\infty$.

Exercice 139. Mines-Ponts ***

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n \phi(t)dt = 0$.

   Montrer que $\phi = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$, on suppose f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0$, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}dt = 0$.

   Montrer que $f = 0$.

Exercice 140. Mines-Ponts ***

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on suppose $\mathrm{rg}(A) = p$.

1. Montrer que $A^T A$ est inversible
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que :

   $||AX - B||_2$ est minimale si, et seulement si, $X = X_0$ où $X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$.

Exercice 141. Mines-Pont ***

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^4}$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$ ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. Étudier la continuité de f en 0.

Exercice 142. Mines Ponts ***

On considère un entier naturel non nul N et n un entier naturel inférieur à N.

On considère un jeu à deux joueurs, A et B.

Le joueur A possède initialement n billes et le joueur B en possède $N - n$.

Une partie se joue en manches successives. Si un joueur perd une manche, il doit donner une bille à l'autre. La partie se termine quand un joueur possède les N billes, ce joueur étant alors déclaré gagnant.

Le joueur A remporte chaque manche avec une probabilité $p \in]0,1[$.

Déterminer la probabilité que A gagne.

Exercice 143. Mines Pont ***

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(F)$ tels que $f \neq 0$ et $f \circ u = v \circ f$.

On note π_u et π_v les polynômes minimaux de u et v.

1. Montrer que π_u et π_v ne sont pas premiers entre eux.
2. On suppose f injective montrer que $\pi_u | \pi_v$.
3. On suppose f surjective montrer que $\pi_v | \pi_u$.

Exercice 144. Mines Ponts ***

Déterminer les natures des séries $\sum \int_0^{\pi} \cos(t)^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ et $\sum \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

Exercice 145. Mines Ponts ***

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $g : x \mapsto x f(x)$.
   (a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 (on pourra utiliser un changement de variable).
   En déduire un équivalent simple de f en 0.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g'' = g$ puis que $g' = -g$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} \dfrac{t \sin(t)}{x^2+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \dfrac{x \cos(t)}{x^2+t^2} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 146. Mines Ponts ***

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^T A$.
Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 147. Mines Ponts ***

Montrer l'existence et l'unicité d'un réel x tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t(1+t^x)} \mathrm{d}t$ soit convergente de valeur nulle.

Exercice 148. Mines Ponts ***

Soit (Ω, A, P) un univers probabilisé.
Soient A et B des événements quelconques.
On note $x = P(A \cap B)$, $y = P\left(\overline{A} \cap B\right)$, $z = P\left(A \cap \overline{B}\right)$ et $t = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

1. Exprimer $\alpha = P(A \cap B) - P(A) P(B)$? ? ? comme un polynômes en x, y, z, t (ce polynôme doit être de degré 1 en chacune de ses variables).
2. En déduire que $|\alpha| \leq \dfrac{1}{4}$.

Exercice 149. Mines Ponts ***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle qu'une partition de $\mathcal{E}_n = [\![1, n]\!]$ est un ensemble de parties de $\mathcal{E}_n$ non vides, deux-à-deux disjointes et de réunion égale à $\mathcal{E}_n$.

On note p_n le nombre de partitions de $\mathcal{E}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose $p_0 = 1$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \binom{n}{k}$
2. Soit f la somme de la série entière $\sum \dfrac{p_n}{n!} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.
   Montrer que $R > 1$ et calculer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 150. Centrale ***

Soit l'équation différentielle $(E) : x^2y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = \dfrac{1}{1+2x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ en cherchant d'abord des solutions sous la forme $x \mapsto x^\alpha$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que (E) admet une unique solution développable en série entière sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.
4. Résoudre l'équation (E) sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Exercice 151. Centrale ***

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right) = L \in \mathbb{R}$.

1. Supposons que $L > 0$, donner la nature de la série de terme général $f(n)$.
2. Supposons que $L < 0$, donner la nature de la série de terme général $f(n)$.
3. Supposons que $L = 0$ et que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$ où $a \neq -1$, discuter la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 152. Centrale ***

Pour un entier non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln(2)$
3. En déduire la somme totale de la série de terme général u_n.

Exercice 153. Centrale ***

On considère un espace euclidien E, on note $\mathcal{S}'(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E dont toutes les valeurs propres sont positives.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$, montrer que :
$$f \in \mathcal{S}'(E) \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle f(x)|x\rangle \geq 0.$$
3. Soient f et g dans $\mathcal{S}'(E)$, montrer que :
   i. $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$
   ii. $\mathrm{Im}\,(f + g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$

Exercice 154. Centrale ***

Soit, pour tout entier n, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1 + \sqrt{0}}}}}$.

1. Donner u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Expliciter, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre u_n et u_{n-1} .

3. Donner un équivalent puis un développement à 2 puis 3 termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 155. Centrale ***

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Déterminer la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; on en note γ la limite.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = \ln(2) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\left(\ln(2n)^2 - \ln(n)^2\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
5. En déduire la valeur de la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de γ.

Exercice 156. Centrale ***

On pose $d_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{n}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

1. Calculer d_1 et d_2, puis déterminer une relation simple liant d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.
2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum d_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
3. On note S la somme de la série entière $\sum d_n x^n$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, S(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x(1-x)}$.
   (b) Déterminer R ainsi que d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 157. Centrale ***

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un dé à N faces, numérotées de 1 à N. L'expérience consiste à lancer le dé tant que le numéro de la face est supérieur ou égal à celui obtenu au lancer précédent. Si le numéro est strictement inférieur à celui du lancer précédent, on arrête les lancers. On note alors X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers (sans compter le dernier) si l'expérience s'arrête, et vaut 0 si l'expérience ne s'arrête pas. On se munit d'un univers probabilisé (Ω, A, P).

1. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls.
   Quel est le nombre de k–uplets d'entiers $(x_1, \ldots, x_k)$ tels que $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq n$?
   En déduire que $\Gamma_n^k = \dbinom{n+k-1}{k}$ où Γ_n^k est défini comme le nombre de k–uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ d'entiers tels que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq n$.

2. Quelle est la probabilité que l'expérience ne s'arrête pas ?
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 158. Mines Ponts ***

Soient A et B deux matrices symétriques réelles vérifiant $A^3 = B^3$.

Montrer que $A = B$.

Exercice 159. Mines Ponts ***

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, et u un endomorphisme de E tel qu'il existe P annulateur de u avec $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $E = \ker(u) + \mathrm{Im}\,(u)$.

Exercice 160. Mines Ponts ***

1. Soit A une matrice inversible réelle. Exprimer le polynôme minimal de son inverse en fonction de celui de A.
2. Soit A une matrice orthogonale réelle dont 1 et -1 ne sont pas valeurs propres.

   Montrer que son polynôme minimal est égal à celui de son inverse et que son degré est pair.

2.4 Exercices difficiles

Exercice 161. Centrale ****

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On note $\mathcal{F}$ l'espace engendré par $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathcal{F}$ dans le cas $n = 2$.
2. On se place désormais pour $n \geq 3$.
   (a) Montrer que la seule matrice diagonale dans $\mathcal{F}^\perp$ est la matrice nulle.
   (b) Soit $A \in \mathcal{F}^\perp$ et soit B une matrice antisymétrique, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\langle \exp(tB) | A \rangle = 0$.
   En déduire que A est symétrique.
   (c) Déterminer $\mathcal{F}$.

Exercice 162. Mines Ponts ****

Soit $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et φ est bornée sur un voisinage de 0.

Montrer que φ est linéaire.

Exercice 163. Centrale ****

1. Rappeler quelle est la limite de la probabilité d'une suite décroissante d'événements.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P) suivant chacune une loi de Bernoulli de probabilité $\dfrac{1}{2}$.

   On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2X_k - 1)$.

   Montrer que $\mathrm{E}\left(n^4 T_n^4\right) = 3n^2 - 2n$

3. Montrer qu'il existe un événement négligeable A tel que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\Omega \setminus A$ vers la variable aléatoire constante $\frac{1}{2}$.

Exercice 164. Centrale ****

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0(x) = x \ , \ u_{n+1}(x) = u_n(x)^2 + u_n(x)$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n(x) = \dfrac{\ln(u_n(x))}{2^n}$.

1. Étudier les variations et la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$.
2. Montrer que $\sum (v_{n+1}(x) - v_n(x))$ converge.
   En déduire qu'il existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(x) - v_n(x) = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
3. En déduire un équivalent de $u_n(x)$ en fonction de $\alpha(x)$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \alpha(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 165. Centrale ****

Soit E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel normé de dimension finie sur lequel la norme est notée $\| \ \|$.
On définit, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $N(f) = \sup\{\|f(x)\| \ | \ x \in E, \|x\| = 1\}$.
Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ tel que : $\forall g \in G, N(g - Id) < 1$.

1. Soit $g \in G$, montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{U}$ puis que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$.
2. Montrer que $G = \{Id\}$.

Exercice 166. Polytechnique ****

On se fixe $a_0 > 0$ et $0 < r < 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1+\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+r}.$$
2. Quelle-est la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer qu'il existe un unique a_0 tel que a_n soit équivalent à n.

Exercice 167. ENS ****

On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et V_n le nombre de valeurs distinctes que prennent $S_1, S_2, \ldots, S_n$ i.e. $V_n = \mathrm{card}\{S_1, \ldots, S_n\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(V_{n+1} = V_n + 1) = P([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_n \neq 0])$.
2. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{E}(V_n)}{n}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [S_n \neq 0]\right)$

Exercice 168. ENS ****

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$, on pose $N_a(f) = \|f'' + af\|_\infty$.

1. Pour quelles valeurs de a, N_a est-elle une norme sur E ?
2. On se place dans le cas où $a \leq 0$ et on pose $\varphi : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$.

   φ est-elle continue pour N_a ?

Exercice 169. ENS ****

Soit $n \geq 2$ et soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère les propriétés suivantes :

i. Il existe $n+1$ réels distincts $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\det(A + t_i B) = 0$.

ii. Il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(F) \subset G$, $B(F) \subset G$ et $\dim(F) > \dim(G)$.

Montrer que ces propriétés sont équivalentes.

Indication : pour le sens direct on pourra montrer qu'en supposant **i.**, *A et B ne peuvent pas induire des applications injectives sur* $H = \displaystyle\sum_{t \neq 0} \ker(A + tB)$.

Exercice 170. ENS ****

Soit E un espace vectoriel normé

1. Soit K un compact de E, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de K dans $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x alors $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
   (a) Montrer que f est continue (on pourra d'abord montrer que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x et pour toute fonction ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors $f_{\phi(n)}(x_n)$ tend vers $f(x)$).
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

   i. Il existe une fonction continue f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de E.

   ii. Pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 171. ENS ****

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Pour tout $n \geq 2$, on note $q_n = \text{Card}(\mathcal{P} \cap [\![2, n]\!])$ et $r_n = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}, p|n!} p$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}\cap[\![n+1,2n+1]\!]} \leq \binom{2n+1}{n} \leq 4^n$.
2. Montrer que $r_n = \underset{n\to+\infty}{O}(4^n)$.
3. Montrer que $q_n^{q_n} = \underset{n\to+\infty}{O}(r_n)$.
4. En déduire que $q_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{n}{\ln(n)}\right)$.

Exercice 172. ENS ****

1. On note φ l'indicatrice d'Euler.

   (a) Redémontrer que pour deux entiers m et n premiers entre eux on a $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ et rappeler la formule explicite de calcul de $\varphi(n)$ pour un entier non nul quelconque.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs premiers de n, et on pose $\mu(n)$ égal à $(-1)^{d_n}$ si n n'est divisible par aucun carré de nombre premier et 0 sinon.

   (a) Montrer que pour deux entiers m et n premiers entre eux on a $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d)$ et $\displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

Exercice 173. ENS****

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{\delta \to 0^+} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^1 1_{|f(t)|<\delta} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \right)$.