M.P. – D.S. 1

Samedi quatorze septembre deux mil vint-quatre

Ce sujet comporte deux problèmes qui doivent tous deux être traités, le problème 2 étant nettement plus difficile que le problème 1.

Problème 1

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

Q1. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$ on ait $|f'(t)| \leq M$.

Q2. Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k} \int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\, t} \mathrm{d}t \right)$.

Q3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\, t} \mathrm{d}t \right) = 0$.

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t} \mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\, n\, t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Q4. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t} \right)$ et $\displaystyle\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\sin(2\, n\, t)}{\tan t} \right)$.

En déduire la nature de l'intégrale I_n.

(b) Que vaut I_1 ?

(c) Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $\sin((2\, n + 2)\, t) - \sin(2\, n\, t)$ en fonction de $\cos((2\, n + 1)\, t)$ et $\sin t$.

(d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

Q5. Étudier la convergence des intégrales J_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Q6. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe $\phi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\tan t}$ est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q7. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (J_n - I_n)$.

On pensera à utiliser le préambule.

Q8. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.

On pourra effectuer une intégration par parties.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

On pourra utiliser un changement de variable.

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Problème 2

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires.

Q9. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+t) \leq t \tag{1}$$

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ t\ln(t) \geq -\frac{1}{e} \tag{2}$$

Q10. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J telle que ψ soit de classe C^1 sur I. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ψ' pour que ψ^{-1} soit de classe C^1 sur J et, dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

Vocabulaire : une telle bijection ψ de I dans J telle que ψ et ψ^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^1$ est dite être un C^1 difféomorphisme de I dans J.

II. Construction d'une application particulière.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho}\exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right)x^2\right) \tag{A}$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

Q11. Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\,du$$

En particulier,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

Montrer que F_f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\left]0, \sqrt{2\pi}\right[$.

Q12. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

Q13. Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q14. Pour tout réel x, montrer que

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2 = -\frac{x^2}{2}$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2 = -\frac{x^2}{2}$$

Q15. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\, du$$

Q16. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\, du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$$

Q17. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$

Q18. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$

Q19. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\, du$$

III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\, du$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\, du$$

Q20. Justifier la convergence de ces deux intégrales.

Remarque de M. Denizet : les questions 21 à 23 ne sont pas difficiles à condition de bien utiliser les résultats donnés lors de certaines questions précédentes. Résultats que vous pouvez bien sûr utiliser, en les citant, même sans les avoir justifiés.

Q21. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\, du$$

Q22. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2}$$

Q23. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

Q24. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.