

M.P. 2025–2026 : Colle 15

1 Espaces préhilbertiens réels

1. Rappels : produit scalaire et norme euclidienne associée, orthogonalité, interprétation matricielle dans une base orthonormée en dimension finie.
2. Supplémentaire orthogonal d'un S.E.V. : définition générale, C.S. d'existence lorsque le S.E.V. est de dimension finie ; projecteur orthogonal sur F : définition, expression si F est de dimension finie à l'aide d'une B.O.N. de F ; caractérisation en termes de distance.
3. Matrices orthogonales : définition, structure algébrique, caractérisation comme changement de bases entre bases orthonormales. Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
4. Adjoint d'un endomorphisme : définition, linéarité, caractérisation matricielle, application aux s.e.v. stables.
5. Isométries vectorielles : définition, conservation du produit scalaire, adjoint, caractérisation matricielle, réduction par blocs. Définition d'une rotation en dimension 3.
6. Endomorphismes autoadjoints : définition, cas des projecteurs et symétries, caractérisation matricielle, théorème spectral.
7. automorphismes autoadjoints positifs et définis positifs : définition et caractérisation par le spectre ; idem pour les matrices symétriques.