

Chapitre 1 – Intégrales généralisées et compléments sur les séries numériques

Cadre : \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} , sans autre précision $[a, b]$ désigne un segment réel tel que $a < b$ et I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} . Toutes les fonctions considérées sont définies et continues par morceaux sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} .

1 Intégrale généralisée en une borne infinie

1.1 Intégrale généralisée en $+\infty$

1.1.1 Définition

Définition 1. Convergence d'une intégrale sur $[a, +\infty[$
Soit un réel a et soit une fonction f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} , on pose, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $H(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors :

— si la fonction H converge vers $L \in \mathbb{K}$ en $+\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x f(t)dt \right);$$

— si la fonction H diverge en $+\infty$ on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, cette intégrale n'a pas de valeur dans \mathbb{K} .

Proposition 1. Indépendance de la nature et de la borne propre
Soit un réel a et soit une fonction f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} , pour tout $a' \in [a, +\infty[$ les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(t)dt$ ont alors même nature.

1.1.2 Intégration des fonctions réelles positives

Proposition 2.
Soit un réel a et soit une fonction f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ , on pose, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $H(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors :

— si la fonction H est majorée, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, on a $\int_a^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{K}$;

— si la fonction H n'est pas majorée, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, on note $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Corollaire 1. Comparaison des intégrales de fonctions positives
Soit un réel a et soient deux fonctions f et g continues par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) \leq g(x)$, on a en ce cas :

— $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$ (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$);

— si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge;

— si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Corollaire 2. Utilisation de O ou o

Soit un réel a et soient deux fonctions f et g continues par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ (ou $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$), on a en ce cas :

- si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ;
- si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Corollaire 3. Utilisation de \sim

Soit un réel a et soient deux fonctions f et g continues par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$.

Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ ont alors même nature.

1.1.3 Intégrale absolument convergente

Définition 2. Intégrale absolument convergente

Soit un réel a et soit une fonction f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} .

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite absolument convergente si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Proposition 3. Lien entre la convergence et l'absolue convergence

Soit un réel a et soit une fonction f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} , si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

1.1.4 Intégrales de Riemann

Proposition 4. Intégrale de Riemann en $+\infty$

Soit un réel α , l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.2 Intégrale généralisée en $-\infty$

1.2.1 Définition

Définition 3. Convergence d'une intégrale sur $] -\infty, b]$

Soit un réel b et soit une fonction f continue par morceaux de $] -\infty, b]$ dans \mathbb{K} , on pose, pour tout

$x \in] -\infty, b]$, $H(x) = \int_x^b f(t)dt$, alors :

- si la fonction H converge vers $L \in \mathbb{K}$ en $-\infty$, on dit que $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge et on pose :

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_x^b f(t)dt \right) ;$$

- si la fonction H diverge en $-\infty$ on dit que $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ diverge, cette intégrale n'a pas de valeur.

Proposition 5. Indépendance de la nature et de la borne propre

Soit un réel b et soit une fonction f continue par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{K} , pour tout $b' \in]-\infty, b]$ les intégrales $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{b'} f(t)dt$ ont alors même nature.

1.2.2 Intégration des fonctions réelles positives

Proposition 6.

Soit un réel b et soit une fonction f continue par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{R}_+ , on pose, pour tout

$x \in]-\infty, b]$, $H(x) = \int_x^b f(t)dt$, alors :

- si la fonction H est majorée, l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge, on a $\int_{-\infty}^b f(t)dt \in \mathbb{K}$;
- Si la fonction H n'est pas majorée, l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ diverge, on note $\int_{-\infty}^b f(t)dt = +\infty$.

Corollaire 4. Comparaison des intégrales de fonctions positives

Soit un réel b et soient f et g deux fonctions continues par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{R}_+ telles que $\forall x \in]-\infty, b]$, $f(x) \leq g(x)$, on a en ce cas :

- $\int_{-\infty}^b f(t)dt \leq \int_{-\infty}^b g(t)dt$ (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$);
- si $\int_{-\infty}^b g(t)dt$ converge alors $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge;
- si $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ diverge alors $\int_{-\infty}^b g(t)dt$ diverge.

Corollaire 5. Utilisation de O ou o

Soit un réel b et soient f et g deux fonctions continues par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) = O_{x \rightarrow -\infty}(g(x))$ (ou $f(x) = o_{x \rightarrow -\infty}(g(x))$), on a en ce cas :

- si $\int_{-\infty}^b g(t)dt$ converge alors $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge;
- si $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ diverge alors $\int_{-\infty}^b g(t)dt$ diverge.

Corollaire 6. Utilisation de \sim

Soit un réel b et soient f et g deux fonctions continues par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} g(x)$.

Les intégrales $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^b g(t)dt$ ont alors même nature.

1.2.3 Intégrale absolument convergente

Définition 4. Intégrale absolument convergente

Soit un réel b et soit une fonction f continue par morceaux de $]-\infty, b]$ dans \mathbb{K} .

L'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est dite absolument convergente si l'intégrale $\int_{-\infty}^b |f(t)|dt$ converge.

Proposition 7. Lien entre la convergence et l'absolue convergence

Soit un réel b et soit une fonction f continue par morceaux de $] -\infty, b]$ dans \mathbb{K} , si $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

1.2.4 Intégrales de Riemann

Proposition 8. Intégrale de Riemann en $-\infty$

Soit un réel α , l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2 Intégrale impropre en une borne finie

2.1 Intégration sur $[a, b[$

2.1.1 Définition

Définition 5. Convergence d'une intégrale sur $[a, b[$

Soit une fonction f continue par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{K} , on pose, pour tout $x \in [a, b[$, $H(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors :

— si la fonction H converge vers $L \in \mathbb{K}$ en b , on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge et on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x f(t)dt \right);$$

— si la fonction H diverge en b on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge, cette intégrale n'a pas de valeur.

Proposition 9. Indépendance de la nature et de la borne propre

Soit une fonction f continue par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{K} , pour tout $a' \in [a, b[$ les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_{a'}^b f(t)dt$ ont alors même nature.

2.1.2 Intégration des fonctions réelles positives

Proposition 10.

Soit une fonction f continue par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ , on pose, pour tout $x \in [a, b[$, $H(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors :

— si la fonction H est majorée, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, on a $\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{K}$;

— Si la fonction H n'est pas majorée, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, on note $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

Corollaire 7. Comparaison des intégrales de fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $\forall x \in [a, b[, f(x) \leq g(x)$, on a en ce cas :

- $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$);
- si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge;
- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Corollaire 8. Utilisation de O ou o

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ (ou $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$), on a en ce cas :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge;
- si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Corollaire 9. Utilisation de \sim

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ telles que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$.

Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ont alors même nature.

2.1.3 Intégrale absolument convergente**Définition 6.** Intégrale absolument convergente

Soit une fonction f continue par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{K} .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Proposition 11. Lien entre la convergence et l'absolue convergence

Soit une fonction f continue par morceaux d'un intervalle de la forme $[a, b[$ dans \mathbb{K} , si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

2.2 Intégration sur $]a, b]$

Toutes les définitions et résultats du paragraphe 2.1 s'adaptent en considérant, sous réserve de convergence :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b f(t)dt \right)$$

2.3 Ambiguïté de la notation $\int_a^b f(t)dt$ et intégrale « faussement impropre »

Pour deux réels a et b tels que $a < b$ la notation $\int_a^b f(t)dt$ peut paraître ambiguë car elle ne mentionne pas si a et b sont compris ou non dans l'intervalle d'intégration, cette ambiguïté n'est pas préjudiciable car si cette notation désigne plusieurs intégrales possibles alors ces intégrales sont égales.

Définition 7. Intégrale « faussement généralisée »

Soit une fonction f continue par morceaux sur un intervalle de la forme $]a, b]$ (où $a \in \mathbb{R}$) et à valeurs dans \mathbb{K} .

Si cette fonction f est prolongeable par continuité en a , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement généralisée en a , elle est alors nécessairement convergente (et même absolument convergente).

2.4 Intégrales de Riemann

Proposition 12. Intégrale de Riemann en 0

Soit un réel α , l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Corollaire 10. Intégrale de Riemann en une borne finie

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, alors :

- l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;
- l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3 Intégrale sur un intervalle quelconque

3.1 Intégrale doublement généralisée

Définition 8.

Soient a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction continue par morceaux de $]a, b[$ dans \mathbb{K} .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si, pour $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont toutes deux convergentes.

De plus, en cas de convergence, on pose : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

3.2 Propriétés

3.2.1 Structure d'espace vectoriel et linéarité

Proposition 13.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I dont l'intégrale converge sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ sur lequel l'intégration sur I est une forme linéaire.

3.2.2 Relation de Chasles

Proposition 14. Relation de Chasles

Soient I et J deux intervalles tels que :

$I \cup J$ est un intervalle et $I \cap J$ est vide ou réduit à un singleton.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I \cup J$ et dont les intégrales sur I et sur J convergent, alors l'intégrale de f sur $I \cup J$ converge et on a :

$$\int_{I \cup J} f(t)dt = \int_I f(t)dt + \int_J f(t)dt .$$

3.2.3 Positivité et croissance (fonctions à valeurs réelles)

Proposition 15. Positivité de l'intégrale d'une fonction positive

Soit une fonction f continue par morceaux de I dans \mathbb{R} dont l'intégrale sur I converge.

Si f est positive sur I alors $\int_I f(t)dt \geq 0$

Corollaire 11. Croissance de l'intégration

Soient deux fonctions f et g continues par morceaux de I dans \mathbb{R} dont les intégrales sur I convergent, on a alors :

$(\forall t \in I, f(t) \leq g(t)) \Rightarrow \int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt.$

Proposition 16.

Soit une fonction f continue de I dans \mathbb{R} , de signe constant sur I et dont l'intégrale sur I converge.

Si $\int_I f(t)dt = 0$ alors f est identiquement nulle sur I .

3.2.4 Changement de variable

Proposition 17. Changement de variable dans une intégrale généralisée

Soient I et J deux intervalles et soit φ une bijection croissante et de classe \mathcal{C}^1 de J dans I .

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans \mathbb{K} alors $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur J et les intégrales $\int_I f(t)dt$ et $\int_J f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt$ ont même nature et même valeur en cas de convergence.

3.2.5 Intégration par parties

Proposition 18. Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{K} et soient a et b les bornes de I .

Si le produit fg admet des limites finies en a et en b , les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ ont alors même nature.

De plus, en cas de convergence, on a l'égalité $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

3.2.6 Extension du théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1.

Soit I de la forme $]a, b[$ ou $[a, b[$ et soit f une fonction continue de I dans \mathbb{K} dont l'intégrale sur I converge.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est alors définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I , c'est l'unique primitive de f sur I admettant une limite nulle en a .

Corollaire 12.

Soit I de la forme $]a, b[$ ou $[a, b[$ et soit f une fonction continue de I dans \mathbb{K} dont l'intégrale sur I converge.

La fonction $F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ est alors définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I , c'est l'unique primitive de $-f$ sur I admettant une limite nulle en b .

3.3 Intégrale à bornes variables et légitimité de l'écriture $\int_a^a f(t)dt$

Pour une intégrale $\int_{u(x)}^b f(t)dt$ possédant une borne variable telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)) = a$ (où $a \in \overline{\mathbb{R}}$), ce qui vient d'être exposé assure que si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge alors on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\int_{u(x)}^b f(t)dt \right) = \int_a^b f(t)dt$.

Pour $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ possédant deux bornes variables avec $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)) = a$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} (v(x)) = b$, par relation de Chasles si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \right) = \int_a^b f(t)dt$.

Il se présente alors un cas particulier qui présente des risques d'erreur dans le cas où $a = b$ car on pourrait croire à tort que l'on a toujours $\int_a^a f(t)dt$ qui existe et vaut 0.

Si f est définie en a on a bien sûr $\int_a^a f(t)dt = 0$ mais si f n'est pas définie en a , $\int_a^a f(t)dt$ est une intégrale doublement généralisée qui a un sens (et vaut 0) si l'intégrale de f est convergente en a mais qui n'a pas de sens si l'intégrale de f n'est pas convergente en a .

Dans ce dernier cas on ne sait pas a priori comment se comporte $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ quand x tend vers x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v(x)) = a$.

Exercice : déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{x^2}^x \frac{dt}{t^2} \right); \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{x^2}^x \frac{dt}{t} \right); \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{x^2}^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} e^{-t^2} \right).$$

4 Notion de fonction intégrable sur un intervalle

4.1 Définition et caractérisation

Définition 9. Fonction intégrable sur un intervalle

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans \mathbb{K} , cette fonction est dite intégrable sur I si l'une des deux conditions suivante est remplie :

- i. I est un segment ;
- ii. I n'est pas un segment et l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente.

Proposition 19.

Soit une fonction f continue par morceaux de I dans \mathbb{K} , cette fonction est intégrable sur I si et seulement si l'ensemble $\left\{ \int_S |f(t)|dt \mid S \text{ segment inclus dans } I \right\}$ est majoré.

Corollaire 13.

Soit une fonction f continue par morceaux de I dans \mathbb{K} .

Si f est intégrable sur I , elle est également intégrable sur tout intervalle J inclus dans I .

4.2 Utilisation de la comparaison

Proposition 20. utilisation de \leq

Soient deux fonction f et g continues par morceaux de I dans \mathbb{K} telles que $|f| \leq |g|$.
Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I

Proposition 21. utilisation de O (ou o)

Soient deux fonction f et g continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{K} telles que $f(t) = O_{t \rightarrow b}(g(t))$.
Si g est intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Proposition 22. utilisation de \sim

Soient deux fonction f et g continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{K} telles que $f(t) \sim_{t \rightarrow b} g(t)$.
 g est intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, f est intégrable sur $[a, b[$.

4.3 Propriétés

Proposition 23. Structure d'espace vectoriel et linéarité

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ noté $\mathcal{L}_1(I, \mathbb{K})$.
L'intégration sur I est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_1(I, \mathbb{K})$

Proposition 24. Inégalité de la moyenne

Soit une fonction f continue par morceaux et intégrable sur I , on a alors : $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$

5 Intégration des relations de comparaison

Proposition 25. Intégration de O

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{K} .
Soit g une fonction continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ .
On suppose que $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$, on a en ce cas :

- si $\int_a^b g(t) dt$ converge (i.e. g intégrable en b) alors $\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$;
- si $\int_a^b g(t) dt$ diverge (i.e. g non intégrable en b) alors $\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$.

Proposition 26. Intégration de o

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{K} .
Soit g une fonction continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ .
On suppose que $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$, on a en ce cas :

- si $\int_a^b g(t) dt$ converge (i.e. g intégrable en b) alors $\int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$;
- si $\int_a^b g(t) dt$ diverge (i.e. g non intégrable en b) alors $\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$.

Proposition 27. Intégration de \sim

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

Soit g une fonction continues par morceaux de $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ .

On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, on a en ce cas :

- si $\int_a^b g(t)dt$ converge (i.e. g intégrable en b) alors $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \left(\int_x^b g(t)dt \right)$;
- si $\int_a^b g(t)dt$ diverge (i.e. g non intégrable en b) alors $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \left(\int_a^x g(t)dt \right)$.

6 Séries numériques : comparaison aux intégrales et sommation des relations d'équivalence

6.1 Comparaison série intégrale

6.1.1 Principe de comparaison de $\sum f_n$ et $\int f(t)dt$

On considère une fonction f continue par morceaux et monotone sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}_+$); on pose $n_0 = [a]$.

— **Premier cas : si f est décroissante.**

Par croissance de l'intégration sur $[k, k+1]$: $\forall k \geq n_0, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, on en déduit (notamment) par relation de Chasles :

- i. $\sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k)$
- ii. $\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t)dt$

— **Second cas : si f est croissante.**

Par croissance de l'intégration sur $[k, k+1]$: $\forall k \geq n_0, f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, on en déduit (notamment) par relation de Chasles :

- i. $\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t)dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k)$
- ii. $f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt$

6.1.2 Comparaison série-intégrale pour une fonction positive décroissante

Proposition 28. Comparaison série-intégrale

Soit une fonction f continue par morceaux et décroissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .

La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ont alors même nature.

6.2 Sommatation des relations de comparaison

Proposition 29. Sommatation et relation de domination O

Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

i. Si la série $\sum v_n$ converge (i.e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable), alors $\sum u_n$ converge absolument et :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \right).$$

ii. Si la série $\sum v_n$ diverge (i.e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non sommable) alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right).$$

Proposition 30. Sommatation et relation de négligeabilité o

Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

i. Si la série $\sum v_n$ converge (i.e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable), alors $\sum u_n$ converge absolument et :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \right).$$

ii. Si la série $\sum v_n$ diverge (i.e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non sommable) alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_k \right).$$

Proposition 31. Sommatation et relation d'équivalence \sim

Soient deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont alors même nature et de plus :

i. en cas de convergence (i.e de sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

ii. en cas de divergence (i.e de non sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) :

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k.$$