Mines MP 2009, Épreuve de Mathématiques 2

Jean-Pierre Roudneff, lycée louis-le-Grand

A) Déterminants de Cauchy

1°) Une manière rapide de prouver le résultat consiste à considérer l'endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(]0,1])$ qui, à toute fonction f de E, fait correspondre la fonction $x \longmapsto xf'(x)$. En observant que ϕ_λ en est un vecteur propre relatif à la valeur propre λ, la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ est alors libre dans E, donc dans $\mathcal{C}([0,1])$, en tant que famille de vecteurs propres relatifs à des valeurs propres deux à deux distinctes.

2°) Soit D'_n le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne comme il est suggéré. Par la transformation élémentaire $C_n := C_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k C_k$, sur les colonnes de D'_n, il vient $D'_n = A_n D_n$. D'autre part, comme $R(a_1) = R(a_2) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$, on a $D'_n = R(a_n) D_{n-1}$ en développant D'_n par rapport à sa dernière colonne, ce qui conduit à l'égalité demandée.

3°) Le coefficient A_n de la décomposition en éléments simples de R s'obtient en substituant à X la valeur $-b_n$ dans la fraction $(X+b_n)R(X)$. On trouve $A_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-a_k - b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_k - b_n)}$ et comme $A_n \neq 0$, il vient

$$\frac{R(a_n)}{A_n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n - a_k) \times \prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n + b_k) \times \prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}.$$

La formule $D_n = \dfrac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_i + b_j)}$ résulte alors d'une simple récurrence sur l'entier n.

B) Distance d'un point à une partie dans un espace vectoriel normé

4°) Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $d(x,A) \leqslant \| x - y_n \| \leqslant d(x,A) + \dfrac{1}{n}$. En particulier, si $d(x,A) = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$, donc $x \in \overline{A}$ par caractérisation séquentielle de l'adhérence.
Inversement, si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \| x - y_n \| = 0$, ce qui conduit immédiatement à $d(x,A) = 0$.

5°) La croissance de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (au sens de l'inclusion) entraîne la décroissance de la suite numérique de terme général $d(x, A_n)$. Etant minorée par 0, cette suite converge vers un certain réel d et on a $d(x,A) \leqslant d$ étant donné que l'inclusion $A \supset A_n$ entraîne $d(x,A) \leqslant d(x,A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si l'inégalité stricte avait lieu, il existerait $y \in A$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| x - y \| < d(x, A_n)$, d'où une contradiction en choisissant pour n un entier tel que $y \in A_n$.
On peut ainsi conclure que $d(x,A) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(x, A_n)$.

6°) $B \cap V$ est une boule fermée (et en particulier un fermé borné) de l'espace vectoriel V muni de la norme induite par $\|\,.\,\|$. Comme V est de dimension finie, $B \cap V$ est un compact de V donc de E (en effet, de toute suite à valeurs dans $B \cap V$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $B \cap V$, que l'on travaille dans V ou dans E).
De plus, $d(x,V) = \min\big(d(B \cap V), d(x, V \setminus B)\big)$. Or, pour tout $y \in V \setminus B$, $\| x - y \| > \| x - 0 \| \geqslant d(x, V \cap B)$, si bien que $d(x, V \setminus B) \geqslant d(B \cap V)$, et ainsi $d(x,V) = d(B \cap V)$.

7°) L'application $y \longmapsto \| x - y \|$ est continue (car 1-lipschitzienne) sur le compact $V \cap B$ donc atteint sa borne inférieure d'après le théorème des bornes : d'après la question **6°)**, il existe ainsi $y \in V$ tel que $d(x,V) = \| x - y \|$.

C) Distance d'un point à un s-e-v de dimension finie dans un espace euclidien

8°) lorsque V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, le projeté orthogonal y de x sur V est bien défini, et est caractérisé par le fait que $x-y$ est orthogonal à tout vecteur z de V. D'après le théorème de Pythagore, on a alors

$$\forall z \in V, \quad \| x-z \|^2 = \| (x-y)+(y-z) \|^2 = \| x-y \|^2 + \| y-z \|^2 \geqslant \| x-y \|^2$$

avec égalité si et seulement si $y = z$. On a donc $d(x,V) = \| x-y \|$ et y est l'unique élément de V réalisant cette égalité.

9°) – Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, d'où $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \mid x_j) = 0$. Les lignes de $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vérifient alors la relation de liaison $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ donc $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

– Si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre, considérons une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de l'espace vectoriel V qu'ils engendrent. En appelant $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a alors $\forall i,j \in [\![1, n]\!]$, $(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj}$, ce qui se traduit par l'égalité $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^tP \times P$. Il vient ainsi $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\det P)^2 > 0$.

10°) Soit $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ le projeté orthogonal de x sur V.

Par les transformations élémentaires $C_{n+1} := C_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$ puis $L_{n+1} := L_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$, on constate que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x-y)$, et comme $(x_i \mid x-y) = 0$ pour tout $i \leqslant n$, ce déterminant vaut encore $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \| x-y \|^2$.

D'après **8°)** et **9°)**, on peut alors conclure que $d(x,V)^2 = \dfrac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

D) Comparaison des normes N_∞ et N_2

11°) – Clairement, $N_2(f) \leqslant \left(\int_0^1 (N_\infty(f))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$, soit $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

– Tout élément f de $\overline{A}^{\infty}$ est la limite au sens de N_∞ d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f - f_n) = 0$. L'inégalité précédente montre qu'on a aussi $\lim_{n \to +\infty} N_2(f - f_n) = 0$, d'où $f \in \overline{A}^2$, ce qui établit l'inclusion demandée.

12°) Soit h_n la fonction affine par morceaux définie par $h_n(x) = nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et $h_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Alors $h_n \in V_0$ et $N_2(\phi_0 - h_n) = \left(\int_0^{1/n} (nx)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{1}{3n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On a ainsi $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13°) Soit f un élément donné de $\mathcal{C}([0,1])$. Alors $N_2(f - fh_n)^2 = \int_{[0,1]} f^2 (\phi_0 - h_n)^2 \leqslant \int_{[0,1]} N_\infty(f)^2 (\phi_0 - h_n)^2$ $\leqslant \dfrac{N_\infty(f)^2}{3n}$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} N_2(f - fh_n) = 0$: l'application f est donc limite, au sens de la norme N_2, de la suite de fonctions $(fh_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de V_0.

En conclusion, V_0 est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ au sens de la norme N_2, mais ne l'est pas en revanche pour la norme N_∞ car la limite uniforme (ou même simple) d'une suite de fonctions s'annulant en 0 s'annule également en ce point.

14°) Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé $(E, \| . \|)$. Pour tous $x, y \in \overline{V}$, il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans V telles que $\lim_{n \to +\infty} \| x - x_n \| = \lim_{n \to +\infty} \| y - y_n \| = 0$. Alors, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} \| (\lambda x + \mu y) - (\lambda x_n + \mu y_n) \| = 0$, d'où $\lambda x + \mu y \in \overline{V}$. Par suite, $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.

15°) – Si V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞, alors $\overline{V}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$, donc $\overline{V}^\infty$ contient en particulier toutes les fonctions ϕ_m avec $m \in \mathbb{N}$.

– Réciproquement, si $\overline{V}^\infty$ contient tous les monômes ϕ_m avec $m \in \mathbb{N}$, alors il contient aussi toutes les fonctions polynômes vu que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$. Or toute fonction de $\mathcal{C}([0,1])$ est limite uniforme d'une suite de telles fonctions d'après le théorème de Weierstrass, si bien que $\overline{V}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$.

16°) – Si V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2, alors $\overline{V}^2$ contient de même toutes les fonctions ϕ_m avec $m \in \mathbb{N}$.

– Réciproquement, si $\overline{V}^2$ contient tous les ϕ_m avec $m \in \mathbb{N}$, alors il contient aussi toutes les fonctions polynômes. En utilisant à nouveau le théorème de Weierstrass, tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$ est limite d'une suite d'éléments de $\overline{V}^2$ au sens de la norme N_∞, donc également au sens de N_2 vu que $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$ (avec ici $A = \overline{V}^2$). Par suite, on a bien $\overline{V}^2 = \mathcal{C}([0,1])$, ce qui établit la caractérisation souhaitée.

E) Un critère de densité de W pour la norme N_2

17°) Remarquons tout d'abord que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de $\mathcal{C}([0,1])$ telle que $W = \bigcup_{n\geqslant 0} W_n$. D'après le **5°)**, on sait alors que $d(f,W) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(f,W_n)$ pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

– Si W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ au sens de la norme N_2, on a en particulier $d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier naturel μ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

– Inversement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, alors $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\phi_\mu \in \overline{W}^2$. D'après la question **16°)**, on a ainsi $\overline{W}^2 = \mathcal{C}([0,1])$.

18°) En appliquant le **8°)** à $V = W_n$ et $x = \phi_\mu$, il vient : $d(\phi_\mu, W_n)^2 = \dfrac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$.

Comme $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta) = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha x^\beta \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$, on reconnaît dans $G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ le déterminant de Cauchy relatif aux suites $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définies par $a_k = b_k = \lambda_k + \dfrac{1}{2}$. En appliquant la formule du **3°)**, on obtient (modulo une renumérotation évidente) :

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}) = \frac{\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\prod\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}.$$

On procède de même pour $G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$ et, en simplifiant le rapport, il reste :

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (\mu - \lambda_i)^2}{(2\mu+1) \prod\limits_{i=0}^{n} (\lambda_i + \mu + 1)^2}$$

d'où, en réindexant :

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19°) – Si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on a clairement $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 1$.

– La fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ est décroissante sur $[0,\mu]$ et prend les valeurs $\dfrac{\mu}{\mu+1}$ en 0 et 0 en μ. Comme $\dfrac{\mu}{\mu+1} < 1$, la condition $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 1$ impose d'avoir $\lambda_k \geqslant \mu$ à partir d'un certain rang. Or l'application $x \longmapsto \dfrac{x - \mu}{x + \mu + 1}$ est strictement croissante sur $[\mu, +\infty[$ et de limite 1 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 1$ nécessite réciproquement d'avoir $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

20°) D'après les questions précédentes, $\overline{W}^2 = \mathcal{C}([0,1])$ si et seulement si on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 0$ pour tout entier $\mu \geqslant 0$, ce qui équivaut à ce que la série de terme général négatif $\ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ diverge vers $-\infty$ pour tout $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k,\ k \geqslant 0\}$.
Cette condition est remplie si $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ ne tend pas vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$, la série divergeant alors grossièrement. Si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = 1$, alors $\ln \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \ln \dfrac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$ pour k assez grand et son terme général est équivalent à $-\dfrac{2\mu + 1}{\lambda_k}$ lorsque k tend vers $+\infty$. S'agissant d'une série à termes négatifs, sa divergence équivaut à celle de $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$.
En conclusion, W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

F) Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21°) Si $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ était convergente, alors $\overline{W}^2$ serait strictement inclus dans $\mathcal{C}([0,1])$, donc $\overline{W}^\infty$ également vu que $\overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$, ce qui n'est pas possible si W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ au sens de la norme $\mathbb{N}_\infty$.

22°) Comme μ et les λ_k sont $\geqslant 1$, l'application $f = \phi_\mu - \psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et s'annule en 0. D'après le théorème des bornes, il existe $c \in [0,1]$ tel que $N_\infty(f) = |f(c)|$. Or $f(c) = f(c) - f(0) = \displaystyle\int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$ et, d'après l'inégalité de Schwarz, $\left|\displaystyle\int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\displaystyle\int_0^c f'^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \times \left(\displaystyle\int_0^c 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$, quantité qui est encore majorée par $N_2(f')$ étant donné que $c \in [0,1]$.
L'inégalité $N_\infty(f) \leqslant N_2(f')$ en résulte, ce qui est précisément le résultat demandé.

23°) On observe que la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda_k - 1}$ (défini à partir d'un certain rang) est divergente. En effet, si $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, alors $\dfrac{1}{\lambda_k - 1} \sim \dfrac{1}{\lambda_k}$ et on peut utiliser la règle de comparaison des séries à termes positifs, et sinon, la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k - 1}$ diverge grossièrement.
D'après **20°)**, l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_{\lambda_k - 1}$, $k \geqslant 1$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_2. Par conséquent, pour tout $\mu \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et une suite de réels $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que $N_2\big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\phi_{\lambda_k-1}\big) \leqslant \varepsilon$, et l'inégalité du **22°)** entraîne $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant \varepsilon$ en posant $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{b_k}{\lambda_k} \in W$.
Toutes les fonctions ϕ_μ avec $\mu \in \mathbb{N}^*$ appartiennent ainsi à $\overline{W}^\infty$, de même que ϕ_0 puisque $\lambda_0 = 0$.
Il en résulte que toutes les fonctions polynomiales sont dans $\overline{W}^\infty$ et, en appliquant comme précédemment le théorème de Weierstrass, on peut conclure que $\overline{W}^\infty = \mathcal{C}([0,1])$.

24°) Soit $m = \inf\{\lambda_k,\ k \geqslant 1\}$. Alors la suite définie par $\lambda'_0 = 1$ et $\forall k \geqslant 1,\ \ \lambda'_k = m\lambda_k$ satisfait les conditions de la question **23°)**.
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$: l'application $g : x \longmapsto f(x^m)$ est alors également continue sur $[0,1]$.
Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et une suite de réels $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que $N_\infty\big(g - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda'_k}\big) \leqslant \varepsilon$. Comme $g(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda'_k}(x) = f(x^m) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda_k}(x^m)$ et que $x \longmapsto x^m$ définit une bijection de $[0,1]$ dans lui-même, on a ainsi $N_\infty\big(f - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\phi_{\lambda_k}\big) \leqslant \varepsilon$, ce qui permet de conclure sur la densité de W dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme N_∞.