Interrogation 4
9 décembre 2022

Intégrales à paramètre, réduction

1 (/2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$. Montrer que B est triangulaire supérieure.
Remarque – On pourra utiliser sans démonstration des résultats de cours ou de TD.

A est de taille 3 et a trois valeurs propres distinctes (1,2 et 3), donc le commutant de A est $\mathbb{K}[A]$.

B est donc un polynôme en A, elle est donc également triangulaire supérieure.

◇ ◇ ◇

2 (/2) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable (et inversible). Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^k = A$. Montrer que B est diagonalisable.
Indication – On pourra trouver un polynôme annulateur de B.

A étant diagonisable, elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Comme $B^k = A$, $P(B^k) = 0$, donc

$$\prod_{i=1}^{d}(X^k - \lambda_i)$$

est un polynôme annulateur de B. Or il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, car les λ_i sont tous non nuls (A est inversible), donc B est diagonalisable.

◇ ◇ ◇

Exercice 1 : Une diagonalisation sans calcul

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux. On suppose que PQ est un polynôme annulateur de u.

1 (/2) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Im}(Q(u))$$

2 (/1) On admet que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

Sans calcul, déterminer les multiplicités algébriques de ces deux valeurs propres.

3 (/2) Grâce à ce qui précède, donner sans calcul une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

◇ ◇ ◇

1 *PQ est annulateur de u, donc $E = \mathrm{Ker}((PQ)(u))$.*

Par ailleurs, par lemme des noyaux (P et Q sont premiers entre eux),

$$\mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Ker}((PQ)(u))$$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(P(u))) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(Q(u))) = \dim(\mathrm{Im}(Q(u)))$ *par théorème du rang.*

De plus, $0 = (PQ)(u) = (P(u))(Q(u))$, donc $\mathrm{Im}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$, d'où l'égalité demandée.

Remarque *– L'hypothèse de dimension finie de E est inutile : puisque P et Q sont premiers entre eux, il existe des polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$, et donc pour tout $x \in E$*

$$U(u)P(u)(x) + Q(u)V(u)(x) = x$$

donc si $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$, alors $x = Q(u)V(u)(x) \in \mathrm{Im}(Q(u))$, d'où

$$\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Im}(Q(u))$$

2 *Avec des notations évidentes, $m_1 + m_2 = 3$ et $m_1 + 2m_2 = \mathrm{tr}(A) = 5$, donc $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$.*

3 *Puisque A est diagonalisable de spectre $\{1, 2\}$, $(X-1)(X-2)$ est annulateur de A, donc*

$$E_2(A) = \mathrm{Im}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$$

et

$$E_1(A) = \mathrm{Im}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, en prenant par exemple

$$P = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\-2 & 2 & 1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad D = \mathrm{Diag}(2, 2, 1)$$

on a bien $P^{-1}AP = D$.

Exercice 2 : Réduction effective

1 (/2) Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, et effectuer sa diagonalisation effective, *i.e.* déterminer $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

2 (/2) Soit $B = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Montrer que B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et effectuer la trigonalisation effective de B, *i.e.* expliciter $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}$$

$\diamond \diamond \diamond$

1 *$\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$, donc $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes -1 et 3 : A est diagonalisable.*

De plus, $E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}(A + I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 *$\chi_B = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$: B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

On choisit $X_2 \notin E_1(B)$, par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose $X_1 = (B - I_2)X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: il est clair que (X_1, X_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, et on a, par construction, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Calcul des intégrales de Fresnel

L'objectif de cet exercice est d'établir les formules dites de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ce qui revient à montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-i}{2}$$

Pour ce faire, on introduit la fonction

$$\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \end{array}$$

1 (/1) Montrer qu'en posant, pour tout réel x,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$$

on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2 (/1) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

3 (/2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\mathrm{d}t$$

4 (/1) En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$$

5 (/2) Déduire des questions précédentes la convergence des intégrales ci-dessous et la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i} = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x$$

6 (/2) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$. Montrer que I et J sont convergentes, et, à l'aide d'un changement de variable, que $I = J$.

7 (/2) En utilisant le fait que, pour tout réel t,

$$\frac{2(t^2+1)}{t^4+1} = \frac{1}{t^2 - t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

montrer que $2(I+J) = \pi\sqrt{2}$.

8 (/1) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-i}{2}$$

◇ ◇ ◇

1 *Il s'agit d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *(Hypothèse (majeure) de domination) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a*

$$|g(x,t)| = \frac{e^{-t^2x^2}\times|e^{-ix^2}|}{|t^2+i|} = \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$$

Or $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $\varphi(t) = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (il y a même équivalence), où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (exemple de référence de Riemann), donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, f est (définie et) continue sur $\mathbb{R}$.
Remarque – *Ici, on a pu faire une domination globale.*

2 *Pour tout $t > 0$, $g(x,t)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et la domination précédente est globale, donc valable au voisinage de $+\infty$: f tend vers 0 en $+\infty$.*

3 *On applique bien sûr le théorème de Leibniz :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (déjà prouvé).*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x(t^2+i)\times\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} = -2xe^{-(t^2+i)x^2}$$

3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
4. *(Hypothèse majeure de domination (locale) de la dérivée partielle) Soit* $[a,b]$ *un segment inclus dans* $\mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = 2xe^{-t^2x^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2}$$

où $\varphi : t \mapsto 2be^{-a^2t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *(*φ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$*).*

Ainsi, f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et, pour tout réel* $x > 0$,

$$f'(x) = -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt$$

4 *Soit* $x > 0$. *En effectuant le changement de variable* $u = xt$ *(*$t \mapsto xt$ *est une bijection strictement croissante de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}_+$ *sur lui-même), on obtient bien*

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$$

5 f *étant de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, f' *est bien continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus, pour tout* $a > 0$,

$$\int_1^a f'(x)\,dx = f(a) - f(1)$$

En faisant tendre a *vers* $+\infty$ *(resp. vers* 0*), et sachant que* f *tend vers* 0 *en* $+\infty$ *(resp.* f *est continue en* 0*), on obtient (les convergences des intégrales ci-dessous et) les formules*

$$\int_1^0 f'(x)\,dx = f(0) - f(1) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f'(x)\,dx = \lim_{+\infty} f - f(1) = -f(1)$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx$ *converge, et que*

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx = -(f(0) - f(1)) - f(1) = -f(0)$$

puis, en prenant l'opposé, le résultat annoncé.

6 $t \mapsto \frac{t^2}{t^4+1}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^4+1}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}_+$ *et dominées au voisinage de* $+\infty$ *par* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, *notoirement intégrable au voisinage de* $+\infty$, *donc* I *et* J *sont convergentes.*

En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ *dans* J *(ou dans* I*),* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *étant une bijection strictement décroissante de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur lui-même, on a*

$$J = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\frac{1}{u^4}+1} \times \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,du}{u^4+1} = I$$

donc $I = J$.

7 *Grâce à la formule rappelée par l'énoncé, et par convergence des intégrales introduites*

$$\begin{aligned}
2(I+J) &= \int_0^{+\infty} \frac{2(t^2+1)}{t^4+1}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \left[\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]_0^{+\infty} + \left[\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan(1)+\frac{\pi}{2}-\arctan(1)\right) \\
&= \pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Remarque – *On pouvait limiter les calculs en observant que (grâce au changement de variable $u=-t$) :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} = \int_0^{-\infty} \frac{-du}{u^2+u\sqrt{2}+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

de sorte que

$$2(I+J) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

Remarque – *On a utilisé la formule :* $\forall a>0, \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

8 *Les deux questions précédentes donnent*

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

*La question **5** donne alors*

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{(t^2-i)\,dt}{t^4+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(I-iJ) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-i}{2}
\end{aligned}$$