Un Corrigé du Math 1.

Partie I

1. Soit u un endomorphisme nilpotent son polynôme caractéristique s'écrit
$$\chi_u(X) = X^n - tr(u)X^{n-1} + .. + (-1)^n \det(u) = X^n$$
donc, $tr(u) = 0$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, u^k est nilpotent par suite $tr(u^k) = 0$.

   Autrement, on pourra utiliser que la trace de u est la somme de ces valeurs propres puisque u est scindé et on a $sp(u) = \{0\}$.

2. On a $T_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ puisque $(E_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$ est une base. L'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ qui à u associé $Mat_B(u)$ est linéaire et $N_B = \varphi^{-1}(\{T_n^{++}(\mathbb{R})\ \})$. Ce qui montre que N_B est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. La restriction de φ à N_B réalise un isomorphisme de N_B dans $T_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\dim N_B = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Si $u \in N(E)$ alors le nilindice $1 \leq \vartheta(u) \leq n$ puisque $u^n = 0$ (Cayley-Hamilton). Soit k un entier entre 1 et n. Notons $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ et considérons l'endomorphisme u de E définie par $u(e_1) = 0$, $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq k$ et $u(e_i) = 0$ pour tout $k \leq i \leq n$ (si $k = 1$, $u = 0$). On a $u \in N_B$, $u^k = 0$ et $u^{k-1}(e_k) = e_1 \neq 0$ donc $\vartheta(u) = k$. On aura donc
$$\{\vartheta(u) : u\ \in N_B\} \subseteq \{\vartheta(u) : u\ \in N(E)\} \subseteq [[1,n]] \subseteq \{\vartheta(u) : u\ \in N_B\}.$$
Ce qui montre les égalités.

4.
   - Supposons par l'absurde que la famille $(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$ est liée, il existe $(\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ non nul vérifiant $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$. Soit $j = \min\{1 \leq i \leq p-1 : \alpha_i \neq 0\}$ (j existe par hypothèse). On a :
$$u^{p-j-1}(\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x)) = u^{p-j-1}(0) = 0$$
donc $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$ ce qui est absurde puisque $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x)$ n'est pas le vecteur nul.
   - On suppose que $u^q(y) = 0$ et que $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre. On montre de même que la famille $(y, u(y), .., u^{q-1}(y))$ est libre. Supposons d'abord que $u^{q-1}(y) \in vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$ donc $u^{q-1}(y) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x)$, on appliquant u on obtient
$$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i-1} u^i(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{i-1} u^i(x)$$

donc $\alpha_0 = \alpha_1 = .. = \alpha_{p-2} = 0$ d'après le premier point. On aura $u^{q-1}(y) = \alpha_{p-1}u^{p-1}(x)$ absurde.
Supposons maintenant qu'il existe un vecteur non nul $z \in vect(y, u(y), .., u^{q-1}(y)) \cap vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$. Alors z s'écrit $z = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i u^i(y) \in vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$.
Soit $j = \min\{1 \leq i \leq q-1 : \alpha_i \neq 0\}$ (j existe car $z \neq 0$). Comme $vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$ est stable par u et donc par tous les u^j on en déduit que $\frac{1}{\alpha_j}u^{q-1-j}(z) = u^{q-1}(y) \in vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$ ce qui est absurde. Par suite $vect(x, u(x), .., u^{p-1}(x))$ et $vect(y, u(y), .., u^{q-1}(y))$ sont en somme directe et la famille $(x, u(x), .., u^{p-1}(x), y, u(y), .., u^{q-1}(y))$ est donc libre.

5. Comme $u^p = 0$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} \subseteq \ker u$ et trivialement $\operatorname{Im} u^{p-1} \subseteq \operatorname{Im} u$ par suite $\operatorname{Im} u^{p-1} \subseteq \operatorname{Im} u \cap \ker u$.
Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$ alors $y = u(z)$ avec $u^2(z) = 0$. Si $(y, u^{p-1}(x))$ est libre alors $(x, u(x), .., u^{p-1}(x), z, u(z))$ est libre (car $p \geq 2$) or cette famille est de cardinal $p+1 > n$ ce qui est absurde. Donc
$$\operatorname{Im} u \cap \ker u \subseteq vect(u^{p-1}(x)) \subseteq \operatorname{Im} u^{p-1} \subseteq \operatorname{Im} u \cap \ker u.$$
Ce qui montre que $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \ker u = vect(u^{p-1}(x))$ et donc $\dim \operatorname{Im} u^{p-1} = 1$.

Partie II

6. Soit u un endomorphisme tel que $\operatorname{Im} u \subseteq vect(x)$ alors pour tout $y \in E$ il existe unique $\alpha_y \in \mathbb{R}$ tel que $u(y) = \alpha_y x$. La linéarité de u montre que l'application $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(y) = \alpha_y$ est une forme linéaire. Par application du théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\alpha_y = \langle a, y \rangle$ pour tout $y \in E$. Ainsi pour tout endomorphisme $u \in L(E)$ tq $\operatorname{Im} u \subseteq vect(x)$ il existe unique vecteur $a \in E$ vérifiant $u = a \otimes x$. L'application $a \longrightarrow a \otimes x$ est linéaire donc réalise un isomorphisme de E dans $\{u \ \in L(E) : \operatorname{Im} u \subseteq vect(x)\}$.

7. Soit $(e_2, e_3, .., e_n)$ une base orthonormée de $\{x\}^\perp$ donc $(\frac{x}{\|x\|}, e_2, .., e_n)$ est une BON de E. Comme $\langle a \otimes x(e_i), e_i \rangle = 0$, $2 \leq i \leq n$ on obtient
$$\begin{aligned} trace(a \otimes x) &= \left\langle a \otimes x(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \langle a \otimes x(e_2), e_2 \rangle + ... + \langle a \otimes x(e_2), e_2 \rangle \\ &= \left\langle a \otimes x(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle a, x \rangle \langle x, x \rangle = \langle a, x \rangle . \end{aligned}$$

Partie III

8. Pour $k = 1$, $u + tv = f_0^1 + t f_1^1$ où $f_0^1 = u$ et $f_1^1 = v$.

Supposons que $(u+tv)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} t^i f_i^k$ où $f_0^k = u^k$ et $f_1^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$. On a

$$\begin{aligned}
(u+tv)^{k+1} &= (u+tv)(u+tv)^k = u\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^k + \sum_{i=0}^{k} t^{i+1} v f_i^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} t^i u f_i^k + \sum_{i=1}^{k+1} t^i v f_{i-1}^k = u f_0^k + \sum_{i=1}^{k} t^i (u f_i^k + v f_{i-1}^k) + t^{k+1} v f_k^k \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} t^i f_i^{k+1}
\end{aligned}$$

en particulier $f_0^{k+1} = u f_0^k = u^{k+1}$ et

$$\begin{aligned}
f_1^{k+1} &= u f_1^k + v f_0^k = u\sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} + v u^{k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} u^{i+1} v u^{k-1-i} + v u^{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} u^i v u^{k-i} + v u^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}
\end{aligned}$$

9. Comme $u+tv \in \mathcal{V}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $(u+tv)^p = 0$ donc $\sum\limits_{i=0}^{p} t^i f_i^p = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $f_0^p = u^p = 0$ on obtient en divisant par $t > 0$

$$f_1^p + t\left(\sum_{i=2}^{p} t^{i-2} f_i^p\right) = 0$$

Quand $t \longrightarrow 0^+$ on auras $f_1^p = \sum\limits_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Par linéarité de la trace et le fait que $tr(uv) = tr(vu)$ pour tous endomorphismes u et v, on a

$$\begin{aligned}
tr(f_1^{k+1}) &= tr\left(\sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k} tr(u^i v u^{k-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{k} tr(u^k v) = (k+1) tr(u^k v).
\end{aligned}$$

Comme $(u+tv)$ est nilpotent alors $tr((u+tv)^{k+1}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par suite $\sum\limits_{i=0}^{k+1} t^i tr(f_i^{k+1}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{k} X^i tr(f_i^k) \in \mathbb{R}[X]$ est donc nul, ces coefficients sont nuls, en particulier $tr(f_1^{k+1}) = 0$ ce qui donne que $tr(u^k v) = 0$.

11. On a pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$

$$(u + \frac{1}{m}v)^{p-1}(y) = u^{p-1}(y) + \frac{1}{m}f_1^{p-1}(y) + \sum_{i=2}^{p-1} \frac{1}{m^i} f_i^{p-1}$$

On en déduit que

$$f_1^{p-1}(y) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} m((u + \frac{1}{m}v)^{p-1}(y) - u^{p-1}(y))$$

Comme $m((u+\frac{1}{m}v)^{p-1}(y)-u^{p-1}(y)) \in K(\mathcal{V})$ car $(u+\frac{1}{m}v)^{p-1}(y)$ et $u^{p-1}(y) \in \mathcal{V}^*$ et $K(\mathcal{V})$ est un sous espace vectoriel de dim finie donc fermé, on en déduit que $f_1^{p-1}(y) \in K(\mathcal{V})$.

On utilisant l'égalité de la question 9,

$$u \circ f_1^{p-1} = u(\sum_{i=0}^{p-2} u^i v u^{p-2-i}) = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = v(u^{p-1})$$

Soit $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$ et

$$v(x) = v(u^{p-1}(y)) = u(f_1^{p-1}(y)) \in u(K(\mathcal{V})).$$

12. Soit $y \in K(\mathcal{V})$. Montrons par récurrence que pour tout entier k, il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. Pour $k = 0$ on a

$$y = x + (y - x) = x + u^0(y_0)$$

où $y_0 = y - x \in K(\mathcal{V})$. Supposons que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme par hypothèse $y_k \in K(\mathcal{V}) \subseteq vect(x) + \mathcal{V}_x$ alors il existe $v \in \mathcal{V}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $y_k = \alpha x + v(x)$. D'après la question 11, $v(x) = u(y_{k+1})$ avec $y_{k+1} \in K(\mathcal{V})$. Comme $u_k(x) \in vect(x)$ car $u^0(x) = x$ et $u^k(x) = 0$ si $k \geq 1$ on écrit:

$$y = \lambda_k x + u^k(\alpha x + u(y_{k+1})) = \lambda_k x + \alpha u^k(x) + u^{k+1}(y_k) = \lambda_{k+1} x + u^{k+1}(y_k).$$

Si $k = p$ on aura pour tout $y \in K(\mathcal{V})$, $y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in vect(x)$. Donc $K(\mathcal{V}) \subseteq vect(x)$.

Soit $v \in \mathcal{V}$. On a $v(x) \in u(K(\mathcal{V})) \subseteq u(vect(x)) = \{0\}$ puisque $x \in \ker u$.

Partie IV

13. L'application $\varphi_x : \mathcal{V} \longrightarrow E$ définie par $\varphi(v) = v(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ est linéaire. Donc $\operatorname{Im} \varphi_x = \mathcal{V}_x$ est un sev de E et $\ker \varphi_x = \mathcal{W}$ est un sev de $\mathcal{V}$.

L'application $\psi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ définie par $\psi(v) = \overline{v}$ est linéaire donc $\operatorname{Im} \psi = \overline{\mathcal{V}}$ est un sev de $\mathcal{L}(H)$ et $\ker \psi = \mathcal{Z}$ est un sev de $\mathcal{W}$ donc de $\mathcal{V}$.

14. Avec la notation de la question 13, en appliquant le théorème de rang à φ_x et ψ on obtient: $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}_x + \dim \mathcal{W}$ et $\dim \mathcal{W} = \dim \overline{\mathcal{V}} + \dim \mathcal{Z}$ d'où le résultat.

15. Un endomorphisme u de $\mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{Z}$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subseteq vect(x)$ si et seulement si il existe un vecteur $a_u \in E$ (unique) tel que $u = a_u \otimes x$ (d'après la question 6). Soit $L = \{a_u : u \in \mathcal{Z}\}$, clairement L est un sev de E. L'application $u \longrightarrow a_u$ réalise un isomorphisme de Z dans L, donc $\dim L = \dim \mathcal{Z}$.

    Soit $a \in L$ alors il existe u dans $\mathcal{Z}$ tel que $u = a_u \otimes x$. On a $tr(u) = 0 = \langle a, x\rangle$ d'après la question 7. Donc $x \in L^{\perp}$.

16. Soit $u \in \mathcal{V}$. Si $a \in L$ alors $a \otimes x \in \mathcal{V}$, donc $tr(u \circ a \otimes x) = 0$. Or, pour tout endomorphisme v on a

$$u \circ a \otimes x(y) = \langle a, y\rangle\, v(x) = a \otimes v(x).$$

    par suite

$$\langle a, u(x)\rangle = tr(u \circ a \otimes x) = 0.$$

    Ce qui montre que $\mathcal{V}_x \subseteq L^{\perp}$.
    En général par lemme A,

$$tr(u^k \circ a \otimes x) = \left\langle a, u^k(x)\right\rangle = 0$$

    On en déduit que $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

17. S'il existe un réel λ non nul tel que $\lambda x \in \mathcal{V}_x$ alors λ sera une valeur propre non nul d'un certain $v \in \mathcal{V}$. Ce qui impossible puisque v est nilpotent et $sp(v) = \{0\}$.

    Comme $vect(x)$ et $\mathcal{V}_x$ sont en somme directe et $vect(x)$ et $\mathcal{V}_x \subseteq L^{\perp}$ alors le sev $vect(x) \oplus \mathcal{V}_x \subseteq L^{\perp}$. par suite

$$1 + \dim \mathcal{V}_x = \dim vect(x) \oplus \mathcal{V}_x \leq \dim L^{\perp} = n - \dim L \tag{1}$$

    ce qui donne $\dim \mathcal{V}_x + \dim L \leq n - 1$.

18. Soit $u \in \mathcal{W}$ alors sa matrice dans une base adaptée à la décomposition $E = vect(x) \oplus H$ s'écrit $M_u = \begin{pmatrix} 0 & l_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & M_{\overline{u}} \end{pmatrix}$ où $M_{\overline{u}}$ est la matrice de $\overline{u}$ dans la base de H. Un calcul par blocs montre que la matrice de u^k s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & l_{1,n-1} M_{\overline{u}}^{k-1} \\ 0_{n-1,1} & (M_{\overline{u}})^k \end{pmatrix}$ et donc la matrice de $\overline{u^k}$ dans la base de H est $(M_{\overline{u}})^k$. Ce qui montre que $\overline{u^k} = \overline{u}^k$. Si $u \in \overline{\mathcal{V}}$ alors $u^p = 0$ et donc $\overline{u}^p = 0$ et $\overline{u}$ est nilpotent.

19. Par hypothèse de récurrence on a $\dim \overline{\mathcal{V}} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ et on a $\dim \mathcal{V}_x + \dim \mathcal{Z} = \dim \mathcal{V}_x + \dim L \leq n - 1$ donc d'après la question 14

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} &= \dim \mathcal{V}_x + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \dim \mathcal{Z} + \dim \mathcal{V}_x \\ &\leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

20. Si $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors les inégalités précédentes sont des égalités, en particulier

$$\dim \mathcal{V}_x + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \dim \mathcal{Z} + \dim \mathcal{V}_x$$

donc $\dim \overline{\mathcal{V}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + \dim \mathcal{Z} + \dim \mathcal{V}_x \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1$ donc $\dim L + \dim \mathcal{V}_x = n-1$ ce qui donne

$$\dim vect(x) \oplus \mathcal{V}_x + \dim L = n$$

Comme de plus $\dim vect(x) \oplus \mathcal{V}_x = \dim L^{\perp}$ et $vect(x) \oplus \mathcal{V}_x \subseteq L^{\perp}$ on obtient $vect(x) \oplus \mathcal{V}_x = L^{\perp}$.

D'après la question 16, $v^k(x) \in L^{\perp} = vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

21. Comme $\dim \overline{\mathcal{V}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base β de H telle que pour tout $v \in \mathcal{V}$ la matrice de $\overline{v}$ dans β dans $T_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$. Donc, $\overline{\mathcal{V}}$ est isomorphe à $T_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ en identifiant $\overline{v}$ à sa matrice dans β. Soit M une matrice de $T_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ de nilindice $n-1$ alors il existe $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}$ tel que $mat_{\beta}(\overline{v})$ est M par suite la matrice de v dans la base $\{x\} \cup \beta$ s'écrit $N = \begin{pmatrix} 0 & l \\ 0 & M \end{pmatrix}$ donc le nilindice de v est supérieur où égale à $n-1$. Ce qui montre que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur à $n-1$.

Si $\mathcal{V}_x = \{0\}$ alors la matrice de tout endomorphisme v de $\mathcal{V}$ s'écrit dans la base $\{x\} \cup \beta$ sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & l \\ 0 & M \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque $M \in T_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ et $v(x) \neq 0$. Si le nilindice de v inférieur où égale à $p-2$ alors $\operatorname{Im} v^{p-1} = \{0\}$, l'inclusion est trivial. On suppose que $v^{p-1} \neq 0$. D'après question 5 on a $\dim(\operatorname{Im} v^{p-1}) = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^k(x) \neq 0$ et $v^{k+1}(x) = 0$ (on a $1 \leq k \leq p-1$). On a donc $v^k(x) \in \operatorname{Im} v \cap \ker v = \operatorname{Im} v^{p-1}$ par suite $\operatorname{Im} v^{p-1} = vect(v^k(x))$. D'après la question 20, $v^k(x) \in vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ donc $\operatorname{Im} v^{p-1} \subseteq vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$.

23. On suppose dans cette question que $v(x) = 0$ (sinon le résultat est déjà démontré). On a $w_t = (v + tv_0) \in \mathcal{V}$ et $w_t(x_0) = tv_0(x) \neq 0$ pour tout réel $t > 0$. Donc $\operatorname{Im} w_t^{p-1} \subseteq vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ pour tout $t > 0$.

Soit $y \in E$. On a $w_t^{p-1}(y) = v^{p-1}(y) + t f_1^{p-1}(y) + ... + t^{p-1} f_{p-1}^{p-1}(y)$. Donc

$$v^{p-1}(y) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} w_t^{p-1}(y)$$

Comme $w_t^{p-1}(y) \in vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ et $vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ est fermé de E (sev de dim finie) on en déduit que $v^{p-1}(y) \in vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$. Ce qui montre le résultat.

24. S'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tq $v_0(x) \neq 0$ alors d'après la question précédente $\operatorname{Im} v^{p-1} \subseteq vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ donc

$$\mathcal{V}^* = \bigcap_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Im} v^{p-1} \subseteq vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$$

par suite $K(\mathcal{V}) \subseteq vect(x) \oplus \mathcal{V}_x$. D'après lemme B, $v(x) = 0$ for all $v \in \mathcal{V}$ ce qui est absurde (puisque $v_0(x) \neq 0$).

Conclusion: Il existe $u \in \mathcal{V}$ de nilindice $p \geq n-1$. Soit $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$ non nul. Alors $\mathcal{V}_x = \{0\}$ par suite il existe une base de E dans laquelle toute matrice de $v \in \mathcal{V}$ $\in T_n^{++}(\mathbb{R})$.

QQS Remarques.

1. Le fait que $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$ peut être démontré en se plaçant dans l'espace euclidien E et en remarquant que $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}(E) = \{0\}$ où $S(E)$ est le sous espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E. Connaissant que $\dim \mathcal{S}(E) = \dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ on conclut que $\dim \mathcal{V} + \frac{n(n+1)}{2} \leq n^2 = \dim L(E)$.
2. La preuve du théorème peut être adoptée au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.
3. Le théorème reste vrai si on travaille sur un $\mathbb{K}$-ev où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. (On pourra consulter "Linear Spaces of Nilpotent Matrices :

   https://core.ac.uk/download/pdf/81104571.pdf).
4. Pour toute remarque ou correction que vous voudrez bien m'adresser: email: jamel.jaber@free.fr