Interrogation 1
16 septembre 2022

Structures algébriques, séries numériques

On justifiera ses réponses (sans en faire trop non plus).

1 (/2) Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes (la loi est multiplicative). Montrer que φ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$.

◇ ◇ ◇

2 (/2) Prouver que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

◇ ◇ ◇

3 (/2) Prouver que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Soit $I = 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$. Supposons-le principal : il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $I = P\mathbb{Z}[X]$.

On peut donc écrire $2 = PQ$ où $Q \in \mathbb{Z}[X]$, et donc P doit être constant égal à $p \in \mathbb{Z}$ pour une question de degré.

On a aussi $X = pS$, où $S \in \mathbb{Z}[X]$. En évaluant en 1, p doit être inversible dans $\mathbb{Z}$, donc égal à ± 1, mais alors $I = \mathbb{Z}[X]$: absurde.

◇ ◇ ◇

4 (/2) Un sous-groupe H d'un groupe G est dit caractéristique (dans G) s'il est stable par tout automorphisme φ du groupe G (*i.e.* $\varphi(H) \subset H$). Montrer que le centre $Z(G)$ de G est caractéristique (dans G).

Soit φ un automorphisme de G. Soit $x \in Z(G)$. Pour tout $y \in G$, $xy = yx$, donc $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x)$, donc $\varphi(x)$ commute avec tout élément de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Comme φ est un automorphisme de G, on en déduit que $\varphi(x) \in Z(G)$.

Remarque *– On a seulement utilisé l'hypothèse de surjectivité de φ.*

◇ ◇ ◇

5 (/2) Donner un exemple de groupe non abélien dont tous les sous-groupes propres (ou stricts) sont abéliens.

Le groupe $\mathcal{S}_3$ convient.

◇ ◇ ◇

6 (/2) Donner un exemple de groupe infini dont le groupe des automorphismes est fini.

$(\mathbb{Z}, +)$ *convient (ses automorphismes sont $\pm Id$).*

◇ ◇ ◇

7 (/2) Donner un exemple d'algèbre dont le groupe des automorphismes est infini.

Dans la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[X]$, tous les $P \mapsto P(aX+b)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ sont des automorphismes d'algèbres.

On pouvait aussi travailler dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.

On pouvait aussi travailler dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \geqslant 2$, et utiliser les automorphismes de conjugaison $M \mapsto P^{-1}MP$ (en justifiant que cela donnait bien une infinité d'automorphismes différents).

On pouvait aussi travailler dans une algèbre de fonctions, comme $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, par exemple utiliser les $f \mapsto (x \mapsto f(x^n))$.

$\diamond \diamond \diamond$

8 (/2) On considère deux éléments nilpotents a et b d'un même anneau, d'indices de nilpotence respectifs n_a et n_b. On suppose que a et b commutent. Montrer que $a+b$ est nilpotent.

$\diamond \diamond \diamond$

9 (/2) Donner un exemple de deux éléments nilpotents (d'un même anneau) a et b, d'indices de nilpotence respectifs n_a et n_b, tels que $a+b$ soit nilpotent d'indice n_a+n_b.

On peut prendre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ les matrices $E_{1,2}+E_{3,4}$ et $E_{2,3}$.
Remarque *– Il fallait prendre a et b ne commutant pas.*

$\diamond \diamond \diamond$

10 (/2) On a admis que dans tout anneau commutatif, tout idéal propre était inclus dans un idéal maximal (théorème de Krull). Donner un exemple de groupe abélien dans lequel au moins un sous-groupe propre n'est inclus dans aucun sous-groupe maximal (un sous-groupe propre H d'un groupe G est dit maximal si les seuls sous-groupes de G contenant H sont H et G).

$(\mathbb{Q},+)$ n'a pas de sous-groupe maximal G, car si G n'est pas stable par $x \mapsto \frac{x}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors G n'est pas maximal, et s'il est stable par ces opérations, alors $G = \mathbb{Q}$.

$\diamond \diamond \diamond$

11 (/2) Montrer que toute série absolument convergente est convergente.

$\diamond \diamond \diamond$

12 (/2) Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (on note e^z sa somme). Prouver que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $e^{a+b} = e^a e^b$.

$\diamond \diamond \diamond$

13 (/1) Donner un exemple de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ n'ayant pas même nature, mais telles que $u_n \underset{n}{\sim} v_n$.

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ par exemple.

$\diamond \diamond \diamond$

14 (/2) On considère deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose que $\sum u_n$ est réelle à termes positifs, tandis que $\sum v_n$ est une série complexe. On suppose que $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont-elles nécessairement de même nature ?

Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Si $\sum v_n$ est divergente, alors $\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\infty}{\sim} v_n$, et donc $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ est divergente par comparaison de séries à termes positifs : $\sum u_n$ est donc également divergente.

◇ ◇ ◇

15 (/1) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

$0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n+v_n}{2}$ *(ou même $0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$).*

◇ ◇ ◇

16 (/2) Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $S_n \underset{n\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

On peut faire une comparaison série-intégrale, mais aussi utiliser la sommation des relations de comparaison (cas divergent) : on observe que $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\infty}{\sim} 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) > 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Par substitution,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\infty}{\sim} 2\sqrt{2n}$$

donc

$$S_n = 2\sqrt{2n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) - (2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})) = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})$$

◇ ◇ ◇

17 (/1) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n^2+1}^{n^3} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ converge et déterminer sa limite.

Remarque – On pourra utiliser sans justification un développement asymptotique de la série harmonique.

$u_n = H_{n^3} - H_{n^2} - H_n = \ln(n^3) + \gamma - \ln(n^2) - \gamma - \ln(n) - \gamma + \mathrm{o}(1) = -\gamma + \mathrm{o}(1)$ *donc (u_n) converge vers $-\gamma$.*

◇ ◇ ◇

18 (/2) Nature de $\sum u_n$, où $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$.

On peut utiliser Stirling, ou plus simplement $\ln(n!) \leqslant n\ln(n)$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant u_n$. Comme $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge (exemple de Bertrand), $\sum u_n$ diverge.

◇ ◇ ◇

19 (/4) Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent simple v_n de u_n, puis un équivalent de $u_n - v_n$.

◇ ◇ ◇

(u_n) est une suite croissante. Si elle convergeait vers ℓ, alors par passage à la limite, $\ell = \ell + e^{-\ell}$ d'où $e^{-\ell} = 0$: absurde. Ainsi, (u_n) diverge vers $+\infty$.

On a $e^{u_n}(u_{n+1} - u_n) = 1$, or $e^{u_n}(u_{n+1} - u_n)$ a pour analogue continu $e^{f(x)}f'(x) = \frac{\mathrm{d}(e^{f(x)})}{\mathrm{d}x}$, on peut donc espérer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ tende vers 1. Vérifions-le :

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \underset{n\infty}{\sim} e^{u_n}e^{-u_n} = 1 > 0$$

Ainsi, par sommation des relations de comparaison (cas divergent)

$$e^{u_n} \underset{n\infty}{\sim} n$$

i.e. $e^{u_n} = n(1 + \mathrm{o}(1))$, donc $u_n = \ln(n) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \ln(n) + \mathrm{o}(1) = \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$: $u_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$.

Pour aller plus loin, affinons le calcul précédent :

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) = e^{u_n}\left(e^{-u_n} + \frac{e^{-2u_n}}{2} + \mathrm{o}(e^{-2u_n})\right) = 1 + \frac{e^{-u_n}}{2} + \mathrm{o}(e^{-u_n})$$

et donc

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} - 1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n} > 0$$

Par sommation des relations de comparaison (on somme pour les indices 1 à $n-1$),

$$e^{u_n} - e^{u_1} - (n-1) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2}$$

donc

$$e^{u_n} = n + \frac{\ln(n)}{2} + \mathrm{o}(\ln(n))$$

puis

$$u_n = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

puis

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

20 (/2) Soit (v_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On suppose $\sum v_n$ convergente. Montrer que la série $\sum(-1)^n v_n$ est convergente et que $v_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(/2) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ et $A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k v_k$. Donner un exemple où l'assertion $A_n = \mathrm{o}(R_n)$ n'est pas vérifiée.

1 *La série $\sum(-1)^n v_n$ est absolument convergente par hypothèse, donc convergente.*
Remarque – *On pouvait aussi utiliser le critère spécial des séries alternées ((v_n) tend bien vers 0 par convergence de $\sum v_n$).*

2 *On peut prendre $v_n = q^n$ où $q \in]0,1[$, ou encore $v_n = \frac{1}{n!}$. En revanche, les séries de Riemann ne convenaient pas (intuitivement, le premier terme du reste ne l'emporte pas suffisamment sur les autres).*

◇ ◇ ◇