Interrogation 2
23 septembre 2022

Algèbre linéaire sans réduction, séries numériques

1 (/2) Soit $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Définir ou caractériser (en dimension quelconque) le fait que $F_1, \dots, F_n$ soient en somme directe. Donner une caractérisation spécifique au cas où les F_i sont de dimension finie. On ne demande pas de justification.

Par définition, $F_1, \dots, F_n$ *sont en somme directe si et seulement si l'application*

$$S : \begin{array}{rcl} F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

est injective.

Cela peut se reformuler en l'une quelconque des assertions suivantes :

1. $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$.
2. $\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, p]\!], x_i = 0)$.
3. *Tout vecteur de* E *s'écrit d'au plus une façon comme somme de vecteurs respectifs de* $F_1, \dots, F_p$.
4. *Tout vecteur de* $F_1 + \cdots + F_p$ *s'écrit de manière unique comme somme de vecteurs respectifs de* $F_1, \dots, F_p$.
5. *L'application*
$$S' : \begin{array}{rcl} F_1 \times \cdots \times F_p & \to & F_1 + \cdots + F_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$
est bijective.

En dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ *sont en somme directe si et seulement si*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

◇ ◇ ◇

2 (/2) Montrer, que si u et v sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.

$\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$ *donc* $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

Pour $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(v)$*, on peut écrire au choix (liste non exhaustive) :*

1. *Si* $(e_1, \dots, e_r)$ *est une base de* $\mathrm{Im}(v)$*, alors* $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(u \circ v)$*, donc* $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant r = \mathrm{rg}(v)$.
2. *On a* $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$*, donc* $\dim(\mathrm{Ker}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u \circ v))$*, puis on applique le théorème du rang à* v *et à* $u \circ v$.
3. *On applique le théorème du rang à* $w = u_{|\,\mathrm{Im}(v)}$ *(avantage : donne l'inégalité* $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(E) \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v)$*).*

4. En raisonnant matriciellement, on a montré $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$*. En appliquant ceci à* B^T *et* A^T, $\mathrm{rg}(B^T A^T) \leqslant \mathrm{rg}(B^T)$*. Comme le rang est invariant par transposition et que* $B^T A^T = (AB)^T$*, on a* $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(B)$*.*

$\diamond \diamond \diamond$

3 (/2) Citer (sans justification) trois invariants de similitude.

Par exemple : rang, trace, déterminant, le fait d'être nilpotent, le fait d'être un projecteur ou plus généralement le fait d'admettre un polynôme annulateur Q *fixé.*

$\diamond \diamond \diamond$

4 (/2) Donner (sans justification) une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$ (algèbre des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{C}$).

D'après le cours de MPSI, une base est obtenue par juxtaposition de $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right)_{(a,k)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}^*}$.

$\diamond \diamond \diamond$

5 (/2) Donner (sans justification) un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel E

1. injectif non surjectif.
2. surjectif non injectif.

1. $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto X\mathbb{R}[X]$.

2. $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$.

Remarque – *On devait nécessairement travailler en dimension infinie.*

$\diamond \diamond \diamond$

6 (/2) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle de rang r. Montrer l'existence de $(B, C) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ tel que $A = BC$.

D'après le cours, il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $A = PJ_r(n, p)Q$*.*

On observe que $J_r(n, p) = J_r(n, r)J_r(r, p)$*, de sorte qu'en posant* $B = PJ_r(n, r) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ *et* $C = J_r(r, p)Q \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$*, on a bien* $A = BC$*.*

$\diamond \diamond \diamond$

7 (/2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k)}$.

$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & Q & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k)} \end{array}$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}[X]$ *qui conserve le degré, c'est donc un automorphisme de* $\mathbb{R}[X]$*.*

Autre rédaction : si Q *convient, alors on constate que* $Q = P - P'$*. Réciproquement,* $P - P'$ *convient bien.*

$\diamond \diamond \diamond$

8 (/3) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ admettant une base dont tous les éléments ont même degré ?

Si F est un tel sous-espace vectoriel engendré par des polynômes de degré d, alors $F \subset \mathbb{R}_d[X]$, donc F doit être de dimension finie.

Si réciproquement F est de dimension finie n, soit $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ une base de F. Quitte à permuter les vecteurs de cette base, on peut supposer P_n de degré maximal. Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $Q_j = P_j + P_n$ si $\deg(P_j) < \deg(P_n)$, et $Q_j = P_j$ sinon. La famille $(Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_n)$ est une base de F dont tous les éléments ont même degré.

$\diamond \diamond \diamond$

9 (/3) Existe-t-il une valeur de n telle que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^5)$ soient isomorphes en tant qu'espaces vectoriels ? en tant qu'algèbres ? ($\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ est munie de la structure d'algèbre produit)

On se demande s'il existe n tel que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^5)$ aient même dimension, i.e. $n^2 + 16 = 25$: le choix $n = 3$ convient (et c'est le seul).

En revanche, il n'y a pas d'isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^3) \times \mathcal{L}(\mathbb{K}^4)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^5)$ car la seconde algèbre admet un élément nilpotent d'indice 5, contrairement à la première.

$\diamond \diamond \diamond$

Exercice 1 : Lorsque le rang est additif

(/4) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Montrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u + v)$
2. $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$.

$\diamond \diamond \diamond$

La démonstration usuelle du fait bien connu que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ se fait en deux étapes :

1. *Observer que $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, et donc que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v))$.*
2. *Observer que $\dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) - \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$.*

Ainsi, on a $\mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$.

On cherche donc à établir que si $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont en somme directe, alors les assertions $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$ sont équivalentes. Les assertions « utiles » sont d'ailleurs $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u + v)$ et $E \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

Supposons la première assertion vérifiée. Soit $x \in E$. Il existe donc $y \in E$ tel que $u(x) = (u + v)(y)$, et donc tel que $u(x - y) = v(y)$: on a donc (puisque $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont en somme directe) $x - y \in \mathrm{Ker}(u)$ et $y \in \mathrm{Ker}(v)$: $x = (x - y) + y \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$, d'où une première implication.

Supposons la seconde assertion vérifiée : soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. On écrit $y = u(x)$, où $x \in E$, puis $x = x_u + x_v$ où $x_u \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x_v \in \mathrm{Ker}(v)$. On a donc $y = u(x_u) + u(x_v) = u(x_v) = (u + v)(x_v) \in \mathrm{Im}(u + v)$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u + v)$.

De même (ou parce que $v = (u + v) - u$ et donc $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u + v) + \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u + v)$), on a $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u + v)$, de sorte que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u + v)$.

Exercice 2 : Noyau de dimension finie

(/3) Soit E un espace vectoriel (non supposé de dimension finie), $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\operatorname{Ker}(f)$ de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2)$ est de dimension finie, et que $\dim(\operatorname{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

◇ ◇ ◇

Considérons $g = f_{|\operatorname{Ker}(f^2)} \in \mathcal{L}(\operatorname{Ker}(f^2), E)$.

On a $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f^2) \cap \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f)$ *car* $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.

Soit $y \in \operatorname{Im}(g)$. *Il existe* $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$ *tel que* $y = g(x) = f(x)$. *On a donc* $f(y) = f^2(x) = 0$, *i.e.* $y \in \operatorname{Ker}(f)$, *d'où* $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

Remarque – *On a aussi évidemment* $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(f)$, *d'où* $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, *et il est facile de montrer l'inclusion réciproque, mais nous n'en aurons pas besoin ici.*

g est donc de rang fini, et $\operatorname{rg}(g) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f))$.

D'après le lemme pour le théorème du rang, g induit un isomorphisme de tout supplémentaire G de $\operatorname{Ker}(g)$ *dans* $\operatorname{Ker}(f^2)$ *(l'espace de définition de g) sur* $\operatorname{Im}(g)$, *donc G est de dimension finie. Comme* $\operatorname{Ker}(f^2) = G \oplus \operatorname{Ker}(g) = G \oplus \operatorname{Ker}(f)$, *on en déduit que* $\operatorname{Ker}(f^2)$ *est de dimension finie. De plus, on a par théorème du rang appliqué à g (c'est désormais licite puisque* $\operatorname{Ker}(f^2)$ *est de dimension finie) :*

$$\dim(\operatorname{Ker}(f^2)) = \operatorname{rg}(g) + \dim(\operatorname{Ker}(g)) = \operatorname{rg}(g) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker}(f))$$

Exercice 3 : Transmission de limite

(/2) Soit (u_n) une suite de complexes, convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right)$ tend vers ℓ.

◇ ◇ ◇

On rappelle qu'en posant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *on a* $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$.

En écrivant $u_n = \ell + v_n$, *on se ramène à établir le résultat lorsque* $\ell = 0$.

On a donc $\frac{u_n}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, *donc par sommation des relations de comparaison dans le cas de la divergence (la série de référence est bien à termes positifs), on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \mathrm{o}\left(H_n\right) = \mathrm{o}(\ln(n))$$

d'où le résultat.

Exercice 4 : Série alternée et convexité

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe de limite nulle en $+\infty$.

1 (/2) Montrer que $\sum (-1)^n f(n)$ converge.

2 (/2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k f(k)\right| \leqslant \frac{f(n)}{2}$.

◇ ◇ ◇

1 *f est décroissante : en effet, s'il existait $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$ et $f(x) < f(y)$, alors, pour tout $z > y$,*

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

et donc

$$f(z) \geqslant f(y) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - y)$$

puis f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, c'est absurde.

Ainsi, $(f(n))$ est une suite décroissante de limite nulle, donc par CSSA, $\sum(-1)^n f(n)$ converge.

2 *On nous demande de montrer que*

$$K \overset{def}{=} \frac{f(n)}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f(n+1+k) \geqslant 0$$

Or on peut écrire

$$K = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{f(n+2k)}{2} - f(n+2k+1) + \frac{f(n+2k+2)}{2}\right)$$

et par convexité de f, chaque terme de cette somme est positif, d'où le résultat.