Interrogation 5
27 janvier 2023

Séries entières, probabilités

1 (/1) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Définir la notion de variable aléatoire discrète sur cet espace probabilisable.

$\diamond \diamond \diamond$

2 (/1) Énoncer la proposition dite de continuité croissante.

$\diamond \diamond \diamond$

3 (/2) Énoncer et établir (rapidement) l'inégalité de Markov.

$\diamond \diamond \diamond$

4 (/1 + 1) On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit A_n l'événement « les $n-1$ premiers lancers ont donné 2 ou 4 et le dernier a donné 6 ». Déterminer $P(A_n)$, puis montrer que la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs vaut 1/4.

$P(A_n) = \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{6}$.

Soit B l'événement :« tous les nombres obtenus jusqu'à obtention de 6 sont pairs. »

B est clairement l'union disjointe des A_n ($n \in \mathbb{N}^*$), donc

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$\diamond \diamond \diamond$

5 (/2 + 1)

i Énoncer le théorème de transfert.

ii Soit X une v.a. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Vérifier que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{-p\ln(p)}{1-p}$.

i

ii La seule positivité des termes justifie les calculs qui suivent. On sait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ pour tout $t \in]-1, 1[$, donc

$$\mathrm{E}(1/X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{pq^{n-1}}{n} = \frac{-p}{q} \ln(1-q) = \frac{-p\ln(p)}{1-p}$$

$\diamond \diamond \diamond$

6 (/1 + 1) Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une v.a. suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, déterminer la valeur λ_n de λ qui rend $P(X_\lambda = n)$ maximal.
Déterminer la limite de $(P(X_{\lambda_n} = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

La fonction $x \mapsto e^{-x}x^n$ est maximale en $x = n$. De plus

$$P(X_n = n) = \frac{e^{-n}n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

d'après la formule de Stirling, donc $(P(X_n = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

◇ ◇ ◇

Exercice 1 : Une série entière

On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$. On note f sa somme.

1 (/1) Rappeler le théorème d'Abel radial.

2 (/2) En déduire que $S(x) = \mathrm{o}_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

◇ ◇ ◇

1

2 *On souhaite montrer que $(1-x)S(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1^-.*
Or pour tout $x \in [0, 1[$,

$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n$$

On peut appliquer le théorème d'Abel radial à cette dernière série entière (il y a bien convergence en 1), de sorte que, lorsque x tend vers 1^-, $(1-x)S(x)$ tend vers

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = 0$$

Exercice 2 : Majoration de l'écart type et de la covariance pour des va bornées

1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$.
  a (/1) Montrer que X admet un moment à tout ordre.
  b (/1) Montrer que $\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{1}{4}$.

2 (/2) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ (où $a < b$). Montrer $\mathrm{V}(Z) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

3 Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$.
  a (/1) Rappeler la définition de $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et donner, sans justification, une autre expression de la covariance (similaire à la formule de Koenig).
  b (/1) Montrer que $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \frac{1}{4}$.

◇ ◇ ◇

1

a *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant X^k \leqslant 1$, *donc* X^k *admet une espérance. De plus,* $X^{k+1} \leqslant X^k$, *donc* $\mathrm{E}(X^{k+1}) \leqslant \mathrm{E}(X^k)$ *: la suite* $(\mathrm{E}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

b $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \leqslant \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X^2)$ *or* $x \mapsto x(1-x)$ *est maximale en* $1/2$, *et y vaut* $1/4$, *donc* $\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{1}{4}$.

2 *On écrit* $Z = (b-a)X + a$ *en posant* $X = \frac{Z-a}{b-a}$. *La variable aléatoire* X *est à valeurs dans* $[0,1]$, *donc* $\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{1}{4}$. *On a donc*

$$\mathrm{V}(Z) = (b-a)^2\,\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

3

a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$ *(si* X *et* Y *admettent chacune un moment d'ordre* 2, *ce qui est bien le cas ici). On a aussi* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

b *On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\,\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)}\,\sqrt{\mathrm{V}(Y)} \leqslant \frac{1}{4}$$

par ce qui précède.

Exercice 3 : Loi de Pascal

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k la variable aléatoire donnant le rang du k-ième succès :

$$\forall\, k,n \in \mathbb{N}^*, \quad (S_k = n) = ((X_1 + \cdots + X_{n-1} < k) \cap (X_1 + \cdots + X_n = k))$$

1 (/1) Identifier la loi de S_1 (pas de justification demandée).

2 (/2) Indiquer la loi de S_k pour tout $k \geqslant 2$ (justification rapide).

3 (/2) On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k et $\sum_{i=1}^k Y_i$ ont même loi (à pleinement justifier).

4 (/1) En déduire espérance et variance de S_k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

◇ ◇ ◇

1 $S_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

2 $S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$.

Soit $n \geqslant k$. *On a*

$$(S_k = n) = (X_n = 1) \cap (X_1 + \cdots + X_{n-1} = k-1)$$

or $X_1 + \cdots + X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$, *donc, en notant* $q = 1-p$ *:*

$$P(S_k = n) = p \times \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

3 *Notons* $G_k = \sum_{i=1}^k Y_i$. *On a* $G_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![$. *De plus, pour tout* $n \geqslant k$,

$$(G_k = n) = \bigcup_{\substack{i_1,\dots,i_k \geqslant 1\\ i_1+\dots+i_k=n}} ((Y_1 = i_1) \cap \dots \cap (Y_k = i_k))$$

Cette union étant disjointe,

$$\begin{aligned}
P(G_k = n) &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \geqslant 1\\ i_1+\dots+i_k=n}} P\left((Y_1 = i_1) \cap \dots \cap (Y_k = i_k)\right)\\
&= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \geqslant 1\\ i_1+\dots+i_k=n}} P(Y_1 = i_1)\dots P(Y_k = i_k) \quad \textit{(par indépendance)}\\
&= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \geqslant 1\\ i_1+\dots+i_k=n}} pq^{i_1-1}\dots pq^{i_k-1}\\
&= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \geqslant 1\\ i_1+\dots+i_k=n}} p^k q^{n-k}\\
&= \operatorname{Card}\left((i_1,\dots,i_k) \in (\mathbb{N}^*)^k, i_1+\dots+i_k = n\right) p^k q^{n-k}\\
&= \operatorname{Card}\left((j_1,\dots,j_k) \in \mathbb{N}^k, j_1+\dots+j_k = n-k\right) p^k q^{n-k}\\
&= \binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} p^k q^{n-k} \quad \textit{(exercice de cours)}\\
&= \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}
\end{aligned}$$

4 *Par linéarité de l'espérance et la question précédente,*

$$\mathrm{E}(S_k) = \mathrm{E}(G_k) = \sum_{i=1}^k \mathrm{E}(Y_i) = \frac{k}{p}$$

Par indépendance mutuelle et donc deux à deux des Y_i, *et la question précédente,*

$$\mathrm{V}(S_k) = \mathrm{V}(G_k) = \sum_{i=1}^k \mathrm{V}(Y_i) = \frac{kq}{p^2}$$

Exercice 4 : Formule de convolution de Chu-Vandermonde

On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et on utilise la notation des coefficients binomiaux étendus $\binom{\alpha}{n}$.

1 (/1) Rappeler la formule définissant $\binom{\alpha}{n}$.

2 (/2) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule de convolution de Chu-Vandermonde :

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$$

◇ ◇ ◇

1

2 *Pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n$$

D'autre part, par produit de Cauchy dans l'intervalle ouverte de convergence des séries entières considérées,

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha+\beta}$, il vient bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}$$

Exercice 5 : Une application de la formule des probabilités composées

Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne.

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, soit E_j l'événement « au j-ième tirage, on obtient une boule de chaque couleur ».

1 (/2) Vérifier que $P(E_1) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}}$, puis déterminer, pour tout $j \in [\![2, n-1]\!]$, $P\left(E_{j+1} | \bigcap_{i=1}^{j} E_i\right)$.

2 (/2) En déduire que la probabilité de l'événement « on a tiré une boule de chaque couleur à chaque tirage » vaut $\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}$

◇ ◇ ◇

1 *Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir deux boules dans l'urne, et il y a n^2 tirages donnant une boule de chaque couleur, d'où la valeur de $P(E_1)$.*

De même, pour tout $j \in [\![2, n-1]\!]$, $P\left(E_{j+1} | \bigcap_{i=1}^{j} E_i\right) = \frac{(n-j)^2}{\binom{2(n-j)}{2}}$.

2 *Notons A l'événement étudié. On a clairement $A = \bigcap_{j=1}^{n} E_j$, et la formule des probabilités composées donne*

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(E_1) \prod_{j=1}^{n-1} P\left(E_{j+1} | \bigcap_{i=1}^{j} E_i\right) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)^2}{\binom{2(n-j)}{2}} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{j^2}{\binom{2j}{2}} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{2j^2}{2j(2j-1)} \\
&= \frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Exercice 6 : Principe des zéros isolés

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme sur le disque ouvert de convergence D. On suppose qu'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{0\}$, de limite nulle, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S(z_p) = 0$.

1 (/1) Montrer que tous les a_n sont nuls.

Indication – On pourra raisonner par l'absurde et considérer $n_0 \in \mathbb{N}$ minimal tel que $a_{n_0} \neq 0$.

2 (/2) Plus généralement, on suppose que S est nulle en $a \in D$ mais non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le seul zéro de S sur $D \cap \mathcal{B}(a, \varepsilon)$ soit a.

◇ ◇ ◇

1 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,*

$$S(z) = z^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^{n-n_0} = z^{n_0} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n_0+p} z^p$$

Or la série entière $\sum a_{n_0+p} z^p$ est de rayon de convergence R, et sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence. Comme cette somme n'est pas nulle en 0, elle n'est pas nulle sur un voisinage de 0, et il existe donc un voisinage de 0 sur lequel S n'est nulle qu'en 0, ce qui contredit l'existence de la suite (z_p).

2 *On a vu en exercice que S était développable en série entière en a. Si a n'était pas un zéro isolé, alors on disposerait d'une suite de points de $D \setminus \{a\}$ où S serait nulle, et qui convergerait vers a. D'après la première question, tous les coefficients seraient nuls, donc S serait identiquement nul, ce que l'on a exclu.*