Interrogation 6
3 février 2023

Séries entières, probabilités

1 (/1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance. Rappeler (sans démonstration) la formule donnant $\mathrm{E}(X)$ comme somme d'une série dont le terme général est une probabilité.
Remarque – Cette question de cours intervient dans plusieurs exercices ci-dessous (on y fait allusion).

$\diamond\diamond\diamond$

Exercice 1 : Maximum de n tirages avec remise

On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

1 (/2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $P(X \leqslant k)$? En déduire la loi de X.

2 (/1) À l'aide de la question précédente et de la question de cours, donner la valeur de $\mathrm{E}(X)$.

3 (/2) En déduire que $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

$\diamond\diamond\diamond$

1 *Si* $k \leqslant N$, $P(X \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$, *et si* $k > N$, $P(X \leqslant k) = 1$.
On a $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$, *et, pour tout* $k \in [\![1, N]\!]$,

$$(X \leqslant k) = (X \leqslant k-1) \sqcup (X = k)$$

donc

$$P(X = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

2 $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - P(X \leqslant k)) = \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$.
3 $\frac{\mathrm{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.
D'après le cours sur les sommes de Riemann,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1} = 1 - \int_0^1 x^n \, dx = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 2 : Espérance et variance pour une loi géométrique

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1 (/1) En utilisant la question de cours ci-dessus, montrer que lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$.

2 (/1) En utilisant encore cette formule du cours, mais en l'appliquant à X^2, établir que

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P(X \geqslant n+1)$$

Indication – On pourra écrire $\mathbb{N}^*$ comme union disjointe des $]\!]n^2, (n+1)^2]\!]$, où n décrit $\mathbb{N}$.

3 (/2) À l'aide de cette dernière formule, calculer $\mathrm{E}(X^2)$ puis retrouver $\mathrm{V}(X)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

$\diamond \diamond \diamond$

1 *On sait que pour tout $k \geqslant 1$, $P(X \geqslant k) = q^{k-1}$, d'où*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

2 *On a*

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

On écrit

$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n, \text{ où } I_n =]\!]]\!]]n^2, (n+1)^2]$$

Par théorème de sommation par paquets, dans le cas positif,

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in I_n} P(X^2 \geqslant k)$$

Or, lorsque $k \in I_n$, $(X^2 \geqslant k) = (X \geqslant n+1)$. De plus, $\mathrm{Card}(I_n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, *donc*

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1) P(X \geqslant n+1)$$

3 *D'après la question précédente,*

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (2n+1) q^n$$

or $\mathrm{E}(X^2) = 2\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}$ *(on a utilisé $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, obtenu par dérivation), donc*

$$\mathrm{V}(X) = 2\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Exercice 3 : Inégalité de Hoeffding

(/3) On **admet** que pour toute variable aléatoire réelle centrée Z, à valeurs dans $[a,b]$, on a, pour tout réel α,

$$\mathrm{E}(e^{\alpha Z}) \leqslant \exp\left(\frac{(b-a)^2\alpha^2}{8}\right)$$

On considère des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ réelles mutuellement indépendantes. On suppose de plus que X_i est à valeurs dans $[a_i,b_i]$ pour tout i (avec $a_i < b_i$).

On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$. Montrer que pour tout $t>0$,

$$P(S_n - \mathrm{E}(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(\frac{-2t^2}{(b_1-a_1)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}\right)$$

$\diamond\diamond\diamond$

Pour tout $\alpha>0$, par stricte croissance de $x\mapsto e^{\alpha x}$, on a

$$(S_n - \mathrm{E}(S_n) \geqslant t) = \left(e^{\alpha(S_n-\mathrm{E}(S_n))} \geqslant e^{\alpha t}\right)$$

Par inégalité de Markov (appliquée à une variable aléatoire positive et à un réel strictement positif)

$$P(S_n - \mathrm{E}(S_n) \geqslant t) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left(e^{\alpha(S_n-\mathrm{E}(S_n))}\right)}{e^{\alpha t}}$$

Or $S_n - \mathrm{E}(S_n) = (X_1-\mathrm{E}(X_1))+\cdots+(X_n-\mathrm{E}(X_n))$, et les variables sont mutuellement indépendantes, donc

$$\mathrm{E}\left(e^{\alpha(S_n-\mathrm{E}(S_n))}\right) = \mathrm{E}(\prod_{k=1}^{n} e^{\alpha(X_k-\mathrm{E}(X_k))}) = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{E}(e^{\alpha(X_k-\mathrm{E}(X_k))})$$

La variable $X_k-\mathrm{E}(X_k)$ est centrée à valeurs dans $[a_k-\mathrm{E}(X_k), b_k-\mathrm{E}(X_k)]$ donc, d'après le résultat admis,

$$\mathrm{E}\left(e^{\alpha(X_k-\mathrm{E}(X_k))}\right) \leqslant \exp\left(\frac{(b_k-a_k)^2\alpha^2}{8}\right)$$

Il vient donc finalement

$$P(S_n - \mathrm{E}(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(A\alpha^2 - t\alpha\right)$$

où

$$A = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2$$

On choisit α qui minimise le majorant trouvé : la fonction $\alpha\in\mathbb{R}_+^*\mapsto A\alpha^2-t\alpha$ est minimale en $\alpha=\frac{t}{2A}$, et elle y vaut $-\frac{t^2}{4A}$, ce qui conduit bien à l'inégalité souhaitée.

Exercice 4 : Espérance du nombre de cycles d'une permutation aléatoire

Soit $n\geqslant 2$ un entier, et soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$ (groupe symétrique d'indice n).

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on note L_k la variable aléatoire donnant la longueur de l'orbite de k sous l'action de σ (ce qui revient à donner la longueur du cycle au support duquel k appartient dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints).

Remarque – On compte les points fixes de σ comme des cycles de longueur 1.

1 (/2) Exprimer en fonction des L_i les événements suivants : A :« $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ », B :« σ est un n-cycle », C :« σ est un produit (possiblement vide) de transpositions à supports disjoints (deux à deux) » et D :« σ admet au moins un point fixe ».

2 (/2) Montrer que L_1 suit une loi uniforme.

3 (/1) Il est clair que $L_1, \dots, L_n$ sont identiquement distribuées. Sont-elles indépendantes ?

4 (/2) Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de cycles dans la décomposition de σ. Déterminer $\mathrm{E}(N)$ et en donner un équivalent (à l'aide d'une fonction usuelle) lorsque n tend vers l'infini.
Indication – On pourra notamment écrire $N = N_1 + \cdots + N_n$, où N_p donne le nombre de p-cycles dans la décomposition de σ.

◇◇◇

1 *$A = \cap_{1 \leqslant i \leqslant n}(L_i = 1)$, $B = (L_1 = n)$, $C = \cap_{1 \leqslant i \leqslant n}(L_i \leqslant 2)$ et $D = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}(L_i = 1)$.*

2 *Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Puisque σ suit une loi uniforme, procédons par dénombrement. Le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ telles que l'orbite de 1 soit de cardinal k est*

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!$$

correspondant au choix des $k-1$ points dans l'orbite de 1 (parmi les $n-1$ suivants), puis l'ordre dans lequel il apparaissent quand on itère la permutation sur 1, puis au choix de la permutation des $n-k$ éléments restants.
Ainsi, $P(L_1 = k) = \frac{1}{n!}\binom{n-1}{k-1}(k-1)!(n-k)! = \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k)!}{n!(k-1)!(n-k)!} = \frac{1}{n}$.
Ceci valant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, L_1 suit bien la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

3 *Non, bien sûr : par exemple $(L_1 = n)$ et $(L_2 = 1)$ sont incompatibles mais non négligeables (et donc $P((L_1 = n) \cap (L_2 = 1)) \neq P(L_1 = n)P(L_2 = 1)$), donc non indépendants.*

4 *On observe que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,*

$$N_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(L_i = k)}$$

de sorte que, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(N_k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} P(L_i = k) = \frac{1}{k}$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(N_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 5 : Le théorème de Beppo Levi (convergence monotone)

1 (/2) Soit X une variable discrète à valeurs réelles positives, admettant une espérance. Montrer que $Y = \lceil X \rceil$ admet une espérance, puis établir : $0 \leqslant \mathrm{E}(X) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$.
Indication – On pourra utiliser la question de cours.

2 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose : $\forall \omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ tend vers 0 en décroissant et $\mathrm{E}(X_0) < +\infty$. On souhaite montrer que la suite $(\mathrm{E}(X_n))$ tend vers 0.

a (/1) Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N}^{\infty} P(X_0 > k) \leqslant 1$.

b (/2) Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{N-1} P(X_n > k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

c (/1)En déduire l'existence d'un rang n_0 à partir duquel $0 \leqslant \mathrm{E}(X_n) \leqslant 3$.

d (/1) Conclure, en introduisant la suite $(qX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où q est un entier naturel non nul.

3 (/2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\omega)$ converge vers un réel noté $Y(\omega)$. On suppose aussi que Y est une variable aléatoire discrète (réelle positive) admettant une espérance. Montrer que $\mathrm{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(Y_n)$.

◇ ◇ ◇

1 $\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y > k)$.

2 $0 \leqslant X \leqslant Y \leqslant X + 1$, *donc* Y *admet une espérance, et* $0 \leqslant \mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$. *Or*

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y > k)$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(Y > k) = (X > k)$, *d'où le résultat.*

3

a *On a vu en première question que* $\sum P(X_0 > k)$ *convergeait. La suite de ses restes tend vers* 0, *d'où l'existence de* N.

b *Pour tout* $k \in [\![1, N-1]\!]$, *la suite d'événements* $(X_n > k)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante (pour l'inclusion), donc, par continuité décroissante :*

$$\lim_{n\infty} P(X_n > k) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X_n > k)\right) = P(\{\omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, k < X_n(\omega)\}) = P(\emptyset) = 0$$

Comme N *est fixé, on en déduit bien le résultat.*

c *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n > k) \\
&= P(X_n > 0) + \sum_{k=1}^{N-1} P(X_n > k) + \sum_{k=N}^{\infty} P(X_n > k) \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{N-1} P(X_n > k) + \sum_{k=N}^{\infty} P(X_0 > k) \\
&\leqslant 2 + \sum_{k=1}^{N-1} P(X_n > k)
\end{aligned}$$

la question précédente permet de conclure.

d *Le travail effectué est valable pour la suite* $(qX_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *qui vérifie les mêmes hypothèses, et il existe donc un rang* n_q *à partir duquel* $0 \leqslant \mathrm{E}(qX_n) \leqslant 3$, *i.e.*

$$0 \leqslant \mathrm{E}(X_n) \leqslant \frac{3}{q}$$

La suite $(\mathrm{E}(X_n))$ *converge donc bien vers* 0.

4 *Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite* (X_n) *donnée par* $X_n = Y - \sum_{k=0}^{n} Y_n$.