



### Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications

La première partie établit des résultats utiles dans les parties suivantes, qui sont indépendantes entre elles.

#### Notations

On note  $[x]$  la partie entière du nombre réel  $x$ , c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $x$ .

On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers.

On note  $m \wedge n$  le plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers naturels  $m$  et  $n$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres entiers relatifs, on note  $[[a, b]] = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \leq b\}$ .

L'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

La matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est notée  $I_n$ .

Le terme d'indice  $(i, j)$  d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est noté  $m_{ij}$  et on note  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$ , ou plus simplement  $M = (m_{ij})$  lorsque la taille de  $M$  est implicite.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des nombres entiers naturels divisant  $n$  et on écrit  $\sum_{d|n} = \sum_{d \in \mathcal{D}_n}$  la somme sur tous les nombres entiers naturels  $d$  divisant  $n$ .

Une *fonction arithmétique* est une fonction  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ . L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté  $\mathbb{A}$ .

On dit qu'une fonction arithmétique  $f \in \mathbb{A}$  est *multiplicative* si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0, \\ \forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n). \end{cases}$$

On note  $\mathbb{M}$  l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives.

On note  $\mathbf{1}$ ,  $\delta$  et  $\mathbf{I}$  les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto 1 \end{cases} \quad \delta : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \end{cases} \quad \mathbf{I} : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto n \end{cases}$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions arithmétiques, le *produit de convolution* de  $f$  et  $g$  est la fonction arithmétique notée  $f * g$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

## I Quelques résultats utiles

### I.A – Propriétés générales de la loi $*$

**Q 1.** Vérifier que  $\delta$  est un élément neutre pour la loi  $*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid d_1 d_2 = n\}$ .

**Q 2.** Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n} f(d_1)g(d_2).$$

**Q 3.** En déduire que  $*$  est commutative.

**Q 4.** De même, en exploitant l'ensemble  $\mathcal{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3 \mid d_1 d_2 d_3 = n\}$ , montrer que  $*$  est associative.

**Q 5.** Que peut-on dire de  $(\mathbb{A}, +, *)$  ?

### I.B – Groupe des fonctions multiplicatives

Q 6. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(p^k) = g(p^k),$$

alors  $f = g$ .

Q 7. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2 \end{cases}$$

est bien définie et réalise une bijection entre  $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$  et  $\mathcal{D}_{mn}$ .

Q 8. En déduire que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions multiplicatives, alors  $f * g$  est encore multiplicative.

Q 9. Soit  $f$  une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative  $g$  telle que, pour tout  $p \in \mathcal{P}$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$g(p^k) = - \sum_{i=1}^k f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie  $f * g = \delta$ .

Q 10. Que dire de l'ensemble  $\mathbb{M}$  muni de la loi  $*$  ?

### I.C – La fonction de Möbius

Soit  $\mu$  la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 11. Montrer que  $\mu$  est multiplicative.

Q 12. Montrer que  $\mu * \mathbf{1} = \delta$ .

Q 13. Soit  $f \in \mathbb{A}$ , et soit  $F \in \mathbb{A}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right). \quad (\text{I.1})$$

On note  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = \text{card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k \wedge n = 1\}.$$

Q 14. Démontrer que  $\varphi = \mu * \mathbf{I}$ .

### I.D – Déterminant de Smith

Soient  $f$  une fonction arithmétique,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $g = f * \mu$ . On note  $M = (m_{ij})$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de terme général  $m_{ij} = f(i \wedge j)$ . On définit aussi la matrice des diviseurs  $D = (d_{ij})$  par :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $M'$  la matrice de terme général  $m'_{ij} = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Q 15. Montrer que  $M = M' D^\top$ , où  $D^\top$  est la transposée de  $D$ .

Q 16. En déduire que le déterminant de  $M$  vaut

$$\det M = \prod_{k=1}^n g(k). \quad (\text{I.2})$$

## I.E – Séries de Dirichlet

Soit  $f$  une fonction arithmétique. On définit, pour tout réel  $s$  tel que la série converge,

$$L_f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}.$$

On appelle *abscisse de convergence* de  $L_f$

$$A_c(f) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \text{la série } \sum \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument}\}.$$

On convient que  $A_c(f) = +\infty$  s'il n'existe pas de réel  $s$  tel que la série  $\sum \frac{f(k)}{k^s}$  converge absolument.

**Q 17.** Montrer que si  $s > A_c(f)$ , alors la série  $\sum \frac{f(k)}{k^s}$  converge absolument.

**Q 18.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies. Montrer que si, pour tout  $s > \max(A_c(f), A_c(g))$ ,  $L_f(s) = L_g(s)$ , alors  $f = g$ .

**Q 19.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions multiplicatives d'abscisses de convergence finies. Montrer que, pour tout  $s > \max(A_c(f), A_c(g))$ ,

$$L_{f * g}(s) = L_f(s)L_g(s). \quad (\text{I.3})$$

## II Matrices et endomorphismes de permutation

Dans cette partie  $n$  est un entier naturel non nul.

On note  $\mathfrak{S}_n$  le groupe des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On notera la composition des permutations de manière multiplicative ; par exemple, si  $\gamma$  et  $\sigma$  sont deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\gamma^3\sigma^2 = \gamma \circ \gamma \circ \gamma \circ \sigma \circ \sigma$ .

On dit que deux permutations  $\sigma$  et  $\tau$  de  $\mathfrak{S}_n$  sont *conjuguées* s'il existe une permutation  $\rho \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$ .

Pour  $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on rappelle que, dans  $\mathfrak{S}_n$ , un *cycle de longueur  $\ell$*  est une permutation  $\gamma \in \mathfrak{S}_n$  pour laquelle il existe  $\ell$  éléments deux à deux distincts  $a_1, \dots, a_\ell$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que

$$\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{a_1, \dots, a_\ell\}, \\ a_{i+1} & \text{si } x = a_i \text{ pour } i \leq \ell - 1, \\ a_1 & \text{si } x = a_\ell. \end{cases}$$

L'ensemble  $\text{Supp}(\gamma) = \{a_1, \dots, a_\ell\}$  est appelé *support* du cycle  $\gamma$  et on note  $\gamma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\ell)$ . On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration.

Toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en produit de cycles  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  à supports disjoints :  $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_r$ .

À toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on associe la matrice de permutation  $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### II.A – Similitude de deux matrices de permutation

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété (S) suivante.

Les matrices de permutations  $P_\sigma$  et  $P_\tau$  sont semblables si et seulement si les permutations  $\sigma$  et  $\tau$  sont conjuguées.

**Q 20.** Pour toutes permutations  $\rho, \rho' \in \mathfrak{S}_n$ , montrer que  $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$ . En déduire que, pour toutes permutations  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ , si  $\sigma$  et  $\tau$  sont conjuguées alors  $P_\sigma$  et  $P_\tau$  sont semblables.

**Q 21.** On considère, dans cette question uniquement,  $n = 7$  et les cycles  $\gamma_1 = (1 \ 3 \ 7)$  et  $\gamma_2 = (2 \ 6 \ 4)$ . On considère également une permutation  $\rho \in \mathfrak{S}_7$  telle que  $\rho(1) = 2$ ,  $\rho(3) = 6$  et  $\rho(7) = 4$ . Vérifier que  $\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2$ .

**Q 22.** Plus généralement, montrer que, dans  $\mathfrak{S}_n$ , deux cycles de même longueur sont conjugués.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on note  $c_\ell(\sigma)$  le nombre de cycles de longueur  $\ell$  dans la décomposition de  $\sigma$  en cycles à supports disjoints. On note  $c_1(\sigma)$  le nombre de points fixes de  $\sigma$  :

$$c_1(\sigma) = \text{Card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(j) = j\}.$$

**Q 23.** Montrer que  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  sont conjugués si et seulement si, pour tout  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)$ .

La matrice-ligne  $T_\sigma = (c_1(\sigma) \ c_2(\sigma) \ \dots \ c_n(\sigma))$  s'appelle le *type cyclique* de  $\sigma$ . On vient donc de démontrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type cyclique.

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on note  $\chi_\sigma$  le polynôme caractéristique de la matrice  $P_\sigma : \chi_\sigma(X) = \det(XI_n - P_\sigma)$ .

**Q 24.** Soit  $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et soit  $\gamma \in \mathfrak{S}_\ell$  un cycle de longueur  $\ell$ . Montrer que  $\chi_\gamma(X) = X^\ell - 1$ .

On pourra se ramener au cas  $\gamma = (1\ 2\ \dots\ \ell)$  et considérer la matrice

$$\Gamma_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}).$$

**Q 25.** Montrer que si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , alors  $\chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^n (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}$ .

On pourra justifier que  $P_\sigma$  est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de la forme  $\Gamma_\ell$  ( $\ell \geq 1$ ), où  $\Gamma_\ell$  est définie ci-dessus si  $\ell \geq 2$  et où  $\Gamma_\ell = (1)$  si  $\ell = 1$ .

**Q 26.** En raisonnant sur la multiplicité des racines de  $\chi_\sigma$  et de  $\chi_\tau$ , montrer que si  $P_\sigma$  et  $P_\tau$  sont semblables, alors, pour tout  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^n c_\ell(\sigma) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ q|\ell}}^n c_\ell(\tau).$$

(On somme sur les valeurs de  $\ell$  multiples de  $q$  et appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .)

**Q 27.** En déduire la propriété (S).

On pourra calculer  $T_\sigma D$  où  $T_\sigma$  est le type cyclique de  $\sigma$  et  $D$  est la matrice des diviseurs définies au I.D.

## II.B – Endomorphismes de permutation

Dans cette sous-partie,  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est un *endomorphisme de permutation* s'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telles que  $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On note  $\text{Id}_E$  l'identité de  $E$ .

On note  $\text{Tr}(u)$  la trace d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  et  $\chi_u$  son polynôme caractéristique.

**Q 28.** Montrer que  $u$  est un endomorphisme de permutation si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est une matrice de permutation.

**Q 29.** Soit  $u$  un endomorphisme de permutation de  $E$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable et que sa trace appartient à  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Q 30.** Soient  $A, B$  deux matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

**Q 31.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 = \text{Id}_E$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme de permutation si et seulement si  $\text{Tr}(u)$  est un entier naturel.

**Q 32.** Étudier si l'équivalence de la question précédente subsiste lorsqu'on remplace l'hypothèse  $u^2 = \text{Id}_E$  par  $u^k = \text{Id}_E$  pour  $k = 3$ , puis pour  $k = 4$ .

**Q 33.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme de permutation si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) il existe des entiers naturels  $c_1, \dots, c_n$  tels que  $\chi_u = \prod_{\ell=1}^n (X^\ell - 1)^{c_\ell}$  ;

(b) il existe  $N$  tel que  $u^N = \text{Id}_E$ .

**Q 34.** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  tels que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Tr}(u^k) = \text{Tr}(v^k)$ . Montrer que  $u$  et  $v$  ont même polynôme caractéristique.

**Q 35.** Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme de permutation si et seulement si il existe des entiers naturels  $c_1, \dots, c_n$  tels que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Tr}(u^k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell|k}}^n \ell c_\ell.$$

(On somme sur les valeurs de  $\ell$  divisant  $k$  et appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .)

### III Valeurs propres de la matrice de Redheffer

On définit la matrice de Redheffer par  $H_n = (h_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  où

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{si } i \text{ divise } j \text{ et } j \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit également la fonction de Mertens  $M$ , en posant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k)$  où  $\mu$  est la fonction de Möbius définie au I.C.

**Q 36.** Soient  $A_n = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  la matrice de terme général

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $C_n = A_n H_n$ . En calculant les coefficients de  $C_n$ , montrer que  $\det H_n = M(n)$ .

Pour le calcul du terme d'indice  $(i, j)$  de  $C_n$ , on pourra distinguer le cas  $i = j = 1$ , le cas  $i > 1, j = 1$  et le cas  $i > 1, j > 1$ .

On note  $\chi_n$  le polynôme caractéristique de  $H_n$ , de sorte que  $\chi_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - H_n)$  pour tout réel  $\lambda$ .

Pour  $\lambda$  réel distinct de 1, on définit par récurrence la fonction arithmétique  $\mathbf{b}$ , en posant  $\mathbf{b}(1) = 1$  et, pour tout entier naturel  $j \geq 2$ ,

$$\mathbf{b}(j) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{d|j, d \neq j} \mathbf{b}(d).$$

On définit également la matrice  $B_n(\lambda) = (b_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  de terme général

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{b}(j) & \text{si } i = 1, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 37.** En calculant le produit  $B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)$ , montrer que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^{n-1} \sum_{j=2}^n \mathbf{b}(j).$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que  $\lambda$  est un réel distinct de 1 et on pose  $w = \frac{1}{\lambda - 1}$ .

On pose de plus  $\mathbf{f} = (1 + w)\delta - w\mathbf{1}$ .

**Q 38.** Montrer que  $\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta$ .

**Q 39.** En utilisant les notations des séries de Dirichlet données dans la sous-partie I.E, exprimer, pour des valeurs du réel  $s$  à préciser,  $L_{\mathbf{f}}(s)$  en fonction de  $w$  et  $L_{\mathbf{1}}(s)$ .

On note  $\log_2$  la fonction logarithme en base 2, définie par  $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$  pour tout réel  $x > 0$ .

**Q 40.** Montrer que, pour  $s$  réel suffisamment grand,

$$\frac{1}{L_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 m \rfloor} w^k D_k(m)$$

où  $D_k(m)$  est le nombre de manières de décomposer l'entier  $m$  en un produit de  $k$  facteurs supérieurs ou égaux à 2, l'ordre de ces facteurs étant important.

**Q 41.** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_k(n) = \sum_{m=2}^n D_k(m)$ . Dédurre de la question précédente que

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (\lambda - 1)^{n-k-1} S_k(n).$$

**Q 42.** Montrer enfin que  $H_n$  possède 1 comme valeur propre et que sa multiplicité est exactement

$$n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

• • • FIN • • •