

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\* \* \*

Pour tous entiers  $l, m \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant  $l$  lignes et  $m$  colonnes. Lorsque  $l = m$ , on notera  $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $l \times l$ . Par ailleurs :

- Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ , on notera  $A^T$  la transposée de  $A$ .
- On notera  $O_{l,m}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls. Lorsque  $l = m$ ,  $O_l$  désignera la matrice nulle et  $I_l$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$ .
- Pour toute famille  $(a_i)_{1 \leq i \leq l}$  de réels, on notera  $\text{diag}(a_1, \dots, a_l)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_l(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont  $a_1, a_2, \dots, a_l$ .
- Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ , on notera  $\langle A, B \rangle_F = \text{tr}(A^T B)$  où  $\text{tr}(M)$  désigne la trace de  $M$  pour toute matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et  $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle_F}$ . On pourra utiliser sans démonstration que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$  et que  $\mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_F$  est un espace vectoriel normé de dimension  $lm$ .
- Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$ , on notera  $\text{rg}(A)$  le rang de la matrice  $A$  c'est-à-dire la dimension de l'image de  $A$ . On rappelle que  $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$ .
- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{M}_{l,m}^k(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{R})$  telles que  $\text{rg}(A) = k$ .

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on munit  $\mathbb{R}^p$  de sa structure euclidienne canonique et pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^p$ , on notera  $\|x\|_2$  la norme euclidienne de  $x$ .

## Préliminaire

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$  trois entiers strictement positifs. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

1. Donner l'expression de  $\langle A, B \rangle_F$  en fonction des coefficients de  $A$  et  $B$ .
2. Soit  $u \in \mathbb{R}^p$ . Montrer que  $\|Au\|_2 \leq \|A\|_F \|u\|_2$ .
3. Montrer que  $\|AC\|_F \leq \|A\|_F \|C\|_F$ .

## Première partie

On considère trois entiers  $n, p$  et  $k$  strictement positifs tels que  $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  soit non vide. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ .

4. Montrer que  $k \leq \min(n, p)$  et que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ .
5. Soient  $S = AA^T$  et  $\tilde{S} = A^T A$ .
  - (a) Vérifier que  $S$  est une matrice symétrique qui n'admet que des valeurs propres positives puis montrer que  $\text{Im}(A) = \text{Im}(S)$ .
  - (b) Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre de  $S$  pour une valeur propre  $\lambda > 0$  et soit  $v = A^T u / \sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ . Montrer que  $v$  est un vecteur propre de  $\tilde{S}$  pour la valeur propre  $\lambda$  et  $\|v\|_2 = \|u\|_2$ .
6.
  - (a) Montrer qu'il existe  $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$  et  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  telles que  $S = U\Lambda U^T$  avec  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$  et  $U^T U = I_k$ .
  - (b) Montrer que  $\text{Im}(S) = \text{Im}(U)$  et que  $UU^T$  est la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{Im}(U)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
  - (c) En posant  $V = A^T U D \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$  où  $D = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_k}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ , montrer que  $V^T V = I_k$  et  $\tilde{S} = V\Lambda V^T$ .
7. En déduire que

$$A = U\Sigma V^T,$$

avec  $\Sigma = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$ .

## Deuxième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la meilleure approximation, pour la norme  $\|\cdot\|_F$ , d'une matrice de rang  $k$  par une matrice de rang fixé. Cette partie est indépendante des parties suivantes.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  une matrice de rang  $k$  où  $n, p$  et  $k$  sont des entiers strictement positifs,  $k \leq \min(n, p)$ . On considère la décomposition  $A = U\Sigma V^T$  construite dans la première partie. Soient  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $\tilde{V} \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{R})$  tels que  $l < k$  et  $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_l$ . On note  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_l) \in (\mathbb{R}^p)^l$  la famille des colonnes de  $\tilde{V}$  et  $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^p)^k$  celle des colonnes de  $V$ .

8. (a) Vérifier que  $\|A - A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2$ .

(b) Montrer que

$$\|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 = \sum_{h=1}^k \left( \lambda_h \sum_{m=1}^l \langle v_h, \tilde{v}_m \rangle^2 \right)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  désigne le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^p$ .

9. On suppose ici que  $\lambda_l > \lambda_{l+1}$ .

(a) Pour tout  $l+1 \leq i \leq k$  et tout  $1 \leq j \leq l$ , on pose  $a_i = \sum_{m=1}^l \langle v_i, \tilde{v}_m \rangle_2^2$  et  $b_j = 1 - \sum_{m=1}^l \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2$ .

Montrer que les  $(a_i)$  et  $(b_j)$  sont des réels positifs et que l'on a  $\sum_{i=l+1}^k a_i \leq \sum_{j=1}^l b_j$ .

(b) Montrer que  $\|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 \leq \sum_{h=1}^l \lambda_h$  et que l'on a l'égalité si et seulement si on a  $\text{Vect}(\{v_1, \dots, v_l\}) = \text{Im}(\tilde{V})$  où  $\text{Vect}(X)$  désigne le sous-espace vectoriel engendré par  $X \subset \mathbb{R}^p$ .

(c) Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}^l(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|M - A\|_F^2 \geq \sum_{h=l+1}^k \lambda_h$  avec égalité si et seulement si  $M = U_* \Sigma_* V_*^T$  où  $\Sigma_* = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_l})$ ,  $U_*$  (resp.  $V_*$ ) est la matrice formée des  $l$  premières colonnes de  $U$  (resp. de  $V$ ).

## Troisième partie

Soient  $p, k$  deux entiers strictement positifs et  $V \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$  tel que  $V^T V = I_k$ . Pour tout  $W \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ , on note  $M_{V,W}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p+k}(\mathbb{R})$  définie par blocs par

$$M_{V,W} = \begin{pmatrix} V & I_p \\ O_k & W^T \end{pmatrix}.$$

10. On suppose ici que  $W^T V$  est une matrice inversible.

(a) Montrer que  $M_{V,W}$  est inversible. On notera son inverse  $M_{V,W}^{-1}$ .

(b) Montrer que l'orthogonal  $\text{Im}(W)^\perp$  de  $\text{Im}(W)$  et  $\text{Im}(V)$  sont deux sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^p$  i.e.  $\text{Im}(W)^\perp \oplus \text{Im}(V) = \mathbb{R}^p$ .

*Indication : On pourra commencer par vérifier que pour  $z \in \mathbb{R}^p$ , si  $z \in \text{Im}(W)^\perp$  alors  $W^T z = 0$ .*

(c) On définit la matrice

$$P_{V,W} = (V \ O_p) M_{V,W}^{-1} \begin{pmatrix} I_p \\ O_{k,p} \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $P_{V,W}$  est la matrice de la projection sur  $\text{Im}(V)$  parallèlement à  $\text{Im}(W)^\perp$ .

11. Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  est un ouvert et que l'application  $M \mapsto M^{-1}$  est continue sur cet ouvert.

12. Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $V$  dans  $\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$  tel que  $W^T V$  est inversible pour tout  $W \in \mathcal{V}$  et l'application  $W \mapsto P_{V,W}$  est continue de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

## Quatrième partie

Soient  $n, p$  et  $k$  trois entiers strictement positifs tels que  $k \leq \min(n, p)$ . On définit pour toute la suite l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}).$$

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  une matrice de rang  $k$  et  $(U, \Sigma, V) \in \mathcal{E}$  tels que

$$A = U \Sigma V^T, \quad U^T U = V^T V = I_k$$

et  $\Sigma$  diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs (l'existence de  $(U, \Sigma, V)$  a été montrée dans la première partie).

13. Soient  $(\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{V}) \in \mathcal{E}$ . On considère la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  définie par  $\gamma(t) = (U + t\bar{U})(\Sigma + t\bar{\Sigma})(V + t\bar{V})^T$ .

- (a) Montrer que les fonctions  $t \mapsto \text{rg}(U + t\bar{U})$ ,  $t \mapsto \text{rg}(\Sigma + t\bar{\Sigma})$  et  $t \mapsto \text{rg}(V + t\bar{V})$  sont constantes au voisinage de  $t = 0$ .
- (b) En déduire que  $\gamma(t) \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  au voisinage de  $t = 0$ .
- (c) Montrer que  $\gamma$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donner l'expression de la dérivée  $\gamma'(0)$  de  $\gamma$  en 0.

14. On note  $T_A = \{\bar{U}\Sigma V^T + U\bar{\Sigma}V^T + U\Sigma\bar{V}^T \mid (\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{V}) \in \mathcal{E}, \bar{U}^T U = \bar{V}^T V = O_k\}$ .

- (a) Vérifier que tous les éléments de  $T_A$  sont des vecteurs tangents à  $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  en  $A$  et que  $T_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  dont on donnera la dimension.
- (b) Soit  $N_A = \{\bar{N} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \bar{N}^T U = O_{p,k}, \bar{N} V = O_{n,k}\}$ . Montrer que  $N_A$  est le sous-espace orthogonal à  $T_A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ .

15. Soit  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On dit que  $\tilde{A}$  vérifie la condition (C) si

$$(C) \quad \text{Im}(\tilde{A}V V^T) = \text{Im}(\tilde{A}) \text{ et } \text{Im}(\tilde{A}^T U U^T) = \text{Im}(\tilde{A}^T).$$

- (a) Montrer que si  $\tilde{A}$  vérifie la condition (C) alors  $\text{rg}(\tilde{A}) \leq k$  et

$$\text{Im}(\tilde{A}^T U U^T)^\perp = \ker(\tilde{A}).$$

- (b) Montrer qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$ , la matrice  $\tilde{A}$  vérifie la condition (C) dès que  $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \epsilon$ .

16. Soit  $\phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  définie par  $\phi(\tilde{A}) = (\tilde{A}V V^T, \tilde{A}^T U U^T)$  pour tout  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- (a) Identifier  $\ker(\phi)$  en fonction de  $N_A$  introduit à la question (14b).
- (b) On note  $\pi_A : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  la projection orthogonale sur  $T_A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\phi = \phi \circ \pi_A$ .
- (c) Soit  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  vérifiant la condition (C). On note  $W = \tilde{A}^T U U^T$ . Montrer que si  $P_{V,W}$  est la matrice de la projection sur  $\text{Im}(V)$  parallèlement à  $\text{Im}(W)^\perp$  alors

$$\tilde{A} = \tilde{A}V V^T P_{V,W}.$$

17. En déduire qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que la restriction de  $\pi_A$  à  $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R}) \cap B(A, \epsilon)$  est injective où  $B(A, \epsilon) = \{\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \|\tilde{A} - A\|_F < \epsilon\}$  est la boule ouverte de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  centrée en  $A$  et de rayon  $\epsilon$ .

18. Soit  $\rho_A$  la projection orthogonale sur  $N_A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer pour tout  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on a  $\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)\tilde{A}(I_p - VV^T)$ .

(b) Montrer que  $\rho_A(AB) = 0$  pour tout  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Soit  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  vérifiant la condition (C).

(c) Montrer que si  $W = \tilde{A}^T U U^T$

$$\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)(\tilde{A} - A)V V^T (P_{V,W} - P_{V,V})(I_p - VV^T).$$

(d) En déduire que  $\|\rho_A(\tilde{A})\|_F \leq \sqrt{(n-k)k(p-k)} \|\tilde{A} - A\|_F \|P_{V,W} - P_{V,V}\|_F$ .

19. Montrer que  $T_A$  est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{M}_{n,p}^k(\mathbb{R})$  en  $A$ .