

## 1.2 – épreuves écrites

### 1.2 A - MATHÉMATIQUES I - filière MP

#### I) LE SUJET

Le but du problème est de donner des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions d'un problème de Sturm-Liouville, c'est-à-dire de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec des conditions initiales. A la différence d'un problème de Cauchy, si on désigne par  $y$  une solution de l'équation différentielle, les conditions initiales portent sur  $y(a)$  et  $y'(b)$ ,  $a$  et  $b$  étant distincts.

Le problème met en jeu de l'algèbre euclidienne, des équations différentielles, des probabilités, de la topologie et des séries de fonctions, ce qui assure une bonne couverture du programme de mathématiques de la filière MP.

#### II) LES RESULTATS OBTENUS

La première partie du problème est tout à fait abordable et utilise des notions tout à fait basiques sur l'intégration et les équations différentielles, elle pouvait être abordée par tous les élèves sérieux.

Cette partie a bien différencié les candidats.

Les difficultés allaient ensuite en croissant, avec une intervention de la topologie qui a été très sélective, traitée correctement par de très rares candidats. Il y avait à la fin du problème quelques questions qui pouvaient être résolues assez facilement en utilisant des résultats antérieurs, des élèves bien entraînés à ce genre d'exercice les ont abordées en sautant une grande partie du problème.

Le jury pense que cette épreuve a permis de classer correctement les candidats, surtout la première moitié d'entre eux.

#### III) COMMENTAIRE DETAILLE

Question 1 Il suffisait de faire une intégration par parties, en prenant soin de bien préciser les hypothèses qui permettaient de le faire.

Question 2 La question sur le signe des valeurs propres a été la source de nombreuses erreurs. Certains candidats prétendaient diagonaliser l'endomorphisme  $V \rightarrow V$  et utilisaient des propriétés de sa matrice. Le problème, c'est que l'espace vectoriel  $E$  est de dimension infinie.

Question 3 Il ne fallait surtout pas invoquer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, puisqu'on étudie un problème de Sturm-Liouville.

Question 4 Question plutôt bien réussie, mais il manquait assez souvent la réciproque.

Question 5 Trouver la loi de  $S_n$  ne posait en général pas de problème, par contre le calcul de l'espérance et de la variance pouvait se faire de différentes façons, certaines faisant perdre du temps.

Question 6 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev était en général bien connue et son application n'a pas posé de problème majeur.

Question 7 Cela a été une question très classante, il y avait un tiers environ des candidats capables jusqu'au bout de mener ce raisonnement par découpe. A noter que la rédaction était souvent un peu expéditive sur la fin.

Question 8 Les raisonnements par récurrences donnaient en général une rédaction assez précise, les autres méthodes étaient souvent incomplètes.

Question 9 On demandait de montrer qu'une suite était orthonormée, l'erreur principale a été, sur ce point, d'omettre de vérifier l'orthogonalité. La démonstration de la forme trigonométrique du théorème de Weierstrass n'a été faite correctement que dans un très petit nombre de copies, on trouvait la plupart du temps que c'était une conséquence immédiate de la question 8, ce qui ne donnait aucun point.

Question 10 La difficulté de cette question, très peu réussie, résidait dans la gestion de deux normes sur l'espace vectoriel  $E$ .

Question 11 Nous avons vu beaucoup de calculs interminables (et pas terminés la plupart du temps) et quelques tentatives (assez rares) d'escroqueries sur cette question fermée. Rappelons que savoir mener intelligemment un calcul en l'organisant de manière optimale est une compétence attendue dans la formation mathématique des futurs ingénieurs.

Question 12 Cette question a été peu abordée, les candidats ont visiblement été attirés par la très facile question 13.

Question 13 De très nombreux candidats ont traité cette question, la plupart en utilisant la question 4, quelques uns ont perdu du temps en refaisant le calcul.

Question 14 Le sens direct est assez facile, la réciproque plus délicate, il était donc important de bien les séparer dans la rédaction, les rares tentatives de démonstration par équivalence n'ont pas été couronnées de succès.

Question 15 On n'a trouvé cette question que dans un nombre restreint de copies, on peut penser que pour beaucoup, le temps a manqué.

Question 16 La question ouverte n'a été abordée (la plupart du temps avec succès) que par un très petit nombre de candidats, c'est dommage parce que cela mettait un peu plus en évidence la différence entre un problème de Cauchy et un problème de Sturm-Liouville. En lisant l'énoncé jusqu'au bout les candidats auraient découvert l'existence du cas pour lequel il existe une infinité de solutions, ce qui leur aurait évité d'évoquer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy dans des questions précédentes.

#### **IV RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS**

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points

s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part, de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise. De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié. En revanche, toute tentative de dissimulation ou d'escroquerie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.