ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2018 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - B - (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Notations

Dans ce problème, N, M et P désignent des entiers naturels non nuls. Soit $\mathscr{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à N lignes et M colonnes. Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant M} \in \mathscr{M}_{N,M}(\mathbb{R})$, on note

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \sum_{j=1}^{M} |a_{i,j}|.$$

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{M}_{N,M}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{M}_N(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille N et on identifie $\mathbb{R}^N$ à l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ est ainsi également normé : si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathbb{R}^N$, $\|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i|$.

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}^n(I)$ l'espace vectoriel des fonctions sur I, à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^n$, c'est à dire n fois dérivables sur I et dont la n-ième dérivée est continue sur I.
On munit $\mathscr{C}^0([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|.$$

On note $|S|$ le cardinal d'un ensemble fini S. Pour tout nombre réel a, on note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de a, c'est-à-dire le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant a$.

Partie I

Dans cette partie, on considère $p \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, et $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ une solution **non nulle** de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - p(t)x(t) = 0. \tag{1}$$

On note $\mathscr{Z} = \{t \in [0,1] \,|\, x(t) = 0\}$ l'ensemble des zéros de x sur $[0,1]$.

1a. Soit $s \in [0,1]$ tel que $x(s) = 0$. Montrer que $x'(s)$ est non nul.

1b. Montrer que $\mathscr{Z}$ est fini.

2. On pose $n = |\mathscr{Z}|$. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$. On note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de x, rangés en ordre croissant. Soit $q \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad q(t) < p(t). \tag{2}$$

On considère une fonction $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in [0,1], \quad y''(t) - q(t)y(t) = 0. \tag{3}$$

On fixe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Le but de cette question est de montrer que y s'annule sur $]a_j, a_{j+1}[$.

2a. On suppose d'abord que

$$\forall t \in]a_j, a_{j+1}[, \quad x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0,$$

et on note

$$w(t) = y(t)x'(t) - y'(t)x(t).$$

Montrer que $w(a_{j+1}) > w(a_j)$. En déduire une contradiction.

2b. Montrer qu'il existe $t \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $y(t) = 0$.

On fixe dans toute la suite du sujet $p \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ, on note $x_\lambda \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ l'unique solution de

$$\begin{cases} x''_\lambda(t) - p(t)x_\lambda(t) + \lambda x_\lambda(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ x_\lambda(0) = 0, \quad x'_\lambda(0) = 1. \end{cases} \tag{E_λ}$$

Partie II

3. Soient a, b, T trois réels strictement positifs.

3a. On considère une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall t \in [0,T], \quad f(t) \leqslant a + b\int_0^t f(s)ds.$$

Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $f(t) \leqslant ae^{bt}$.
On pourra étudier les variations de la fonction définie par $t \mapsto \varphi(t) = e^{-tb}\left(a + b\int_0^t f(s)ds\right)$.

3b. On considère une fonction $X : [-T,T] \to \mathscr{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall t \in [-T,T], \quad \|X'(t)\| \leqslant a + b\|X(t)\|.$$

Montrer que pour tout $t \in [-T,T]$, $\|X(t)\| \leqslant (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{M,P}(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

On note $X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x'_\lambda(t) \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\Phi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, t) \mapsto X_\lambda(t) \end{array}$.

5. Montrer que X_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'_\lambda(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t)$ où $A_\lambda(t)$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Dans les question **6**, **7** et **8**, on se donne $R > 0$ et on note

$$c = \sup\{\|A_\lambda(t)\| \mid (t, \lambda) \in [-R, R]^2\}.$$

6. Justifier que c est bien défini et montrer que

$$\forall t \in [-R, R], \quad \|X_\lambda(t)\| \leqslant e^{c|t|}.$$

7a. Soit $(s, t, \lambda) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| \leqslant ce^{cR}|t - s|.$$

7b. Soit $(t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3$. Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \leqslant Re^{2cR}|\lambda - \mu|.$$

7c. Conclure que Φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

8a. Montrer qu'il existe une fonction $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante, continue, et telle que $\omega(r) \to 0$ quand $r \to 0$ et

$$\forall (s, t) \in [-R, R]^2, \quad |p(t) - p(s)| \leqslant \omega(|t - s|).$$

8b. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\alpha(r) = o(r)$ quand $r \to 0$ et

$$\forall (s, t, \lambda) \in [-R, R]^3, \quad \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t - s)A_\lambda(s)X_\lambda(s)\| \leqslant \alpha(|t - s|).$$

8c. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $Y_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'_\mu(t) = A_\mu(t)Y_\mu(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_\mu(t), \quad \text{avec} \quad Y_\mu(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\forall (t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3, \quad \|X_\lambda(t) - X_\mu(t) - (\lambda - \mu)Y_\mu(t)\| \leqslant R^2e^{3cR}|\lambda - \mu|^2.$$

8d. Montrer que Φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et préciser sa différentielle.

9. On note $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)B_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix} ds.$$

10. On suppose dans cette question que $\lambda > 0$.

10a. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin\left(\sqrt{\lambda}(t-s)\right) p(s) x_\lambda(s) ds.$$

10b. En déduire que

$$\forall t \in [0,1], \quad |x_\lambda(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t}.$$

Partie III

On note Z_p l'application qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe le nombre de zéros de x_λ sur $]0,1]$, autrement dit

$$Z_p(\lambda) = \left| \left\{ t \in \,]0,1] \mid x_\lambda(t) = 0 \right\} \right|.$$

On remarquera que ce décompte ne tient pas compte de 0, qui est toujours un zéro de x_λ.

11. Montrer que si pour tout $t \in [0,1]$, $q(t) < p(t)$, alors $Z_p(\lambda) \leqslant Z_q(\lambda)$. En déduire que Z_p est croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $\lambda < \mu$ et $x_\mu(1) = 0$, alors $Z_p(\mu) \geqslant Z_p(\lambda) + 1$.

12. On suppose dans cette question uniquement que p est une fonction constante. Calculer x_λ, puis déterminer $Z_p(\lambda)$ en distinguant selon les valeurs de λ et p.

13. Soit

$$p_+ = \sup_{t \in [0,1]} p(t), \quad p_- = \inf_{t \in [0,1]} p(t).$$

13a. Justifier que p_+ et p_- sont des réels bien définis.
Montrer que si $\lambda < p_-$, alors $Z_p(\lambda) = 0$, et que si $\lambda \geqslant p_-$, alors $Z_p(\lambda) \leqslant \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor$.

13b. Montrer que si $\lambda \geqslant 1 + p_+$, alors $\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor \leqslant Z_p(\lambda)$.

Montrer que si de plus $x_\lambda(1) = 0$, alors $\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor + 1 \leqslant Z_p(\lambda)$.

14. On fixe dans cette question $\mu \in \mathbb{R}$. On note $k = Z_p(\mu)$, et $(t_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ les zéros de x_μ rangés en ordre croissant :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$A_\varepsilon := \left\{ t \in [0,1] \,|\, \exists j \in \{0, \ldots, k\},\ |t_j - t| \leqslant \varepsilon \right\}$$

et

$$B_\varepsilon := \left\{ t \in [0,1] \,|\, \forall j \in \{0, \ldots, k\},\ |t_j - t| \geqslant \varepsilon \right\}$$

14a. Montrer qu'il existe trois réels $\varepsilon, \theta, \eta > 0$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées
(1) pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a $t_{j+1} - t_j \geqslant 2\varepsilon$ et si $t_k < 1$, alors $t_k + \varepsilon \leqslant 1$,
(2) si $|\lambda - \mu| < \theta$, alors $|x'_\lambda(t)| \geqslant \eta$ pour tout $t \in A_\varepsilon$ et $|x_\lambda(t)| \geqslant \eta$ pour tout $t \in B_\varepsilon$.
On pourra utiliser la continuité de la fonction Φ obtenue à la question **7c**.

Jusqu'à la fin de la question **14**, on fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda - \mu| < \theta$.

14b. Montrer que pour tout $j \in \{0, \ldots, k\}$, x_λ a au plus un zéro t tel que $|t - t_j| < \varepsilon$. Montrer que si de plus $j \geqslant 1$ et $t_j < 1$, x_λ a exactement un zéro t tel que $|t - t_j| < \varepsilon$.

14c. Montrer que si $x_\mu(1) \neq 0$, alors $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu)$.

14d. Montrer que si $x_\mu(1) = 0$, alors $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu) - 1$ pour $\lambda < \mu$ et $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu)$ pour $\lambda \geqslant \mu$.

15. Montrer que $\{Z_p(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{N}$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k := \sup\{\lambda \mid Z_p(\lambda) = k - 1\}$.

16a. Justifier que la suite $(\lambda_k)_{k \geqslant 1}$ est bien définie, croissante et tend vers $+\infty$.

16b. Montrer que $x_{\lambda_k}(1) = 0$ et que x_{λ_k} a exactement k zéros sur $]0, 1]$.

17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_k \geqslant 1 + p_+$.

17a. Donner une minoration et une majoration de k en fonction de $\lambda_k - p_-$ et $\lambda_k - p_+$.

17b. En déduire que $\sqrt{\lambda_k} = \pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)$ quand $k \to +\infty$.

17c. Donner un équivalent de $N(\lambda) := \left|\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \lambda_k \leqslant \lambda\right\}\right|$ quand $\lambda \to +\infty$.

Partie IV

On suppose dans toute cette partie que p est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Le but de cette partie est de préciser les estimations obtenues dans la partie précédente, dont on reprend les notations.

18. On suppose dans cette question que $\lambda > 0$. On définit la fonction $S_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(\sqrt{\lambda} t)$, et si $f \in \mathscr{C}^0([0, 1])$, on pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad I_\lambda(f)(t) := \int_0^t S_\lambda(t - s) p(s) f(s) ds.$$

18a. Montrer que cette formule définit une application linéaire continue I_λ de l'espace vectoriel normé $\mathscr{C}^0([0, 1])$ dans lui même, et montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall f \in \mathscr{C}^0([0, 1]), \quad \|I_\lambda(f)\|_\infty \leqslant K \|f\|_\infty.$$

18b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_\lambda + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}} \underbrace{I_\lambda \circ \cdots \circ I_\lambda}_{j \text{ fois}}(S_\lambda) + r_{n,\lambda},$$

où $r_{n,\lambda} \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et qu'il existe un réel $C_n > 0$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant 1, \quad \|r_{n,\lambda}\|_\infty \leqslant \frac{C_n}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}.$$

18c. Montrer que, quand $k \to +\infty$,

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(1-s)\right) p(s) \sin\left(\sqrt{\lambda_k} s\right) \, ds = O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

18d. On note $\varepsilon_k = \sqrt{\lambda_k} - \pi k$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on précisera, tel que

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(-1)^k}{k} \varepsilon_k \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

18e. Montrer qu'il existe un réel $\beta \in \mathbb{R}$, dépendant seulement de p et que l'on précisera, tel que

$$\int_0^1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(1-s)\right) p(s) \sin\left(\sqrt{\lambda_k} s\right) \, ds = \beta (-1)^k + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

18f. Montrer qu'il existe un réel γ, dépendant seulement de p et que l'on précisera, tel que :

$$\sqrt{\lambda_k} = \pi k + \frac{\gamma}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

19. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^0([0,1])$, ne dépendant que de p et que l'on précisera, telle que pour tout entier k assez grand,

$$\forall t \in [0,1], \quad x_{\lambda_k}(t) = \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k t) + \frac{1}{k^2} h(t) \cos(\pi k t) + R_k(t),$$

où $R_k \in \mathscr{C}^0([0,1])$ vérifie

$$\|R_k\|_\infty = O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$