Mathématiques 2

MP **2016**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1,-1\}$

La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.

À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et vérifiant

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$$

I Suites et intégrales

I.A – Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $]0,+\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases}\forall x>0, & f(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\\ f(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad |s|=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

I.B – Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^\infty\frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.B.2) Montrer que $u_1=u_2=\dfrac{\pi}{2}$.

I.C – Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n\qquad\text{avec}\qquad v_n=\int_0^\infty\frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

I.C.2) Montrer que

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1], \quad \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

I.C.4) On admet la relation $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

II.A – Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t.
Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi} u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

II.B – Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega,\ \exists k \geqslant n,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

II.B.1) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

III.A – Étude de $E(|T_n|)$

III.A.1) Montrer que la suite $\left(E(|T_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $\left(E(|T_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.A.3) On suppose $a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n$. Montrer $E(|T_n|) = E(|T_1|) = a_1$.

III.B – Application à une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$J_n = \int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.B.1) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.

On posera $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ et on exprimera l'espérance de $|T_n|$ avec la méthode de la question II.A.4.

III.B.2) Montrer que $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 7$ et que $(J_n)_{n\geqslant 7}$ est strictement croissante.

• • • FIN • • •