**DS1 de MP**
10.09.22

# Devoir surveillé

Durée : 4h

## Problème A – Suites complètement monotones et transformée d'Euler

On note $E$ l'espace vectoriel des suites réelles. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de terme général $u_n$. On considère l'endomorphisme $\Delta$ de $E$ qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

On pose, pour $k$ et $n$ dans $\mathbb{N}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $n \geqslant k$. On convient que $0! = 1$ et que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Il faudra vérifier la convergence des séries rencontrées, même si cela n'est pas explicitement demandé.

### Partie I – Suites complètement monotones

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta^p$ le $p$-ième itéré de $\Delta$, défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$, et, par convention, $\Delta^0$ est l'identité de $E$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *complètement monotone* si pour tous entiers naturels $p$ et $n$, on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0$$

**I.1** Soit $f$ une fonction sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. On considère la suite de terme général $u_n = f(n)$.

**a** Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, et tout entier $n$, il existe un réel $x$ dans l'intervalle $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$$

**b** On considère la suite de terme général $a_n = \frac{1}{n+1}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

**I.2**

**a** Démontrer que pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$$

**b** Soit $b \in ]0,1[$. On considère la suite de terme général $b_n = b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous les entiers naturels $n$ et $p$ et en déduire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

**I.3** Soit $\omega$ une fonction continue et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\mathrm{d}t$.

**a** Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t$$

**b** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

**c** Démontrer que

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t$$

**d** En déduire que l'on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

**I.4** Déduire des questions précédentes que

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

**I.5** On pose $\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\mathrm{d}t$.

**a** Montrer que

$$\mathcal{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

**b** On pose $S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k$. Montrer que $|S - \mathcal{E}_n| \leqslant \frac{S}{2^{n+1}}$.

## Partie II – Transformée d'Euler

Dans cette partie, on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et l'on note $S$ sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le but est de démontrer que

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

On dit que la série $\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ est la *transformée d'Euler* de la série $\sum(-1)^k u_k$.

**II.1**

**a** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

**b** Montrer que pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, on a $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$.

**II.2**

**a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n \right)$$

**b** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left( \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n \right)$$

**II.3**

**a** On pose $E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$. Montrer que

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left( \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k u_k \right)$$

**b** Conclure.

# Problème B – Sommes de parties d'un groupe additif

Dans tout ce problème, $(G, +)$ est un groupe abélien, *i.e.* $+$ est loi de composition interne sur $G$, associative et commutative, $G$ admet un élément neutre (noté $0_G$) pour $+$, et tout élément $g$ de $G$ admet un symétrique noté $-g$ dans $G$ pour $+$.

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n$-ièmes de l'unité est un groupe multiplicatif abélien d'ordre (ou de cardinal) $n$. En changeant l'écriture, on peut supposer que la loi soit additive

Étant donné deux parties $A$ et $B$ de $G$, on définit la *somme* de $A$ et de $B$ et on note $A + B$ l'ensemble :

$$A + B = \{a + b, \quad (a, b) \in A \times B\}.$$

Soit $A$ une partie de $G$. On définit par récurrence la notation $nA$ pour tout entier naturel non nul $n$ par $1A = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n + 1)A = A + nA$.

Si $b \in B$, la notation $b + A$ désignera la partie $\{b\} + A$ de $G$.

**1** Soit $t \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$.

**a** Soit $n$ et $p$ des entiers naturels tels que $n \geqslant p$. Montrer :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

**b** Montrer que l'ensemble des $t$-uplets $(a_1, \ldots, a_t)$ d'entiers naturels tels que $a_1 + \cdots + a_t = N$ a pour cardinal $\binom{N+t-1}{N}$.

**c** Vérifier l'encadrement :

$$\frac{t^N}{N!} \leqslant \binom{N+t-1}{N} \leqslant t^N.$$

**2** On suppose dans cette question $G$ fini. Soit $A$ et $B$ des parties non vides de $G$ telles que $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$.

**a** Montrer que $G = A + B$.

**b** Donner un exemple où $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(G)$ mais $G \neq A + B$.

**3**

**a** Soit $A$ et $B$ des parties finies et non vides de $G$. Montrer :

$$\max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B)) \leqslant \mathrm{Card}(A + B) \leqslant \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

**b** Soit $A$ une partie finie non vide de $G$. Montrer que la suite $(\mathrm{Card}(nA))$ est croissante, et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, que :

$$\mathrm{Card}(nA) \leqslant \binom{\mathrm{Card}(A) + n - 1}{n}.$$

**4** Soit $A$ et $B$ des parties finies et non vides de $\mathbb{Z}$.

**a** Montrer que $\mathrm{Card}(A + B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1$.

**b** On suppose que $\mathrm{Card}(A + B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1$, et que $A$ et $B$ ne sont pas des singletons. Montrer l'existence d'entiers $a, b, d$ tels que

$$A = \{a + kd, k \in [\![0, \mathrm{Card}(A) - 1]\!]\} \quad \text{et} \quad B = \{b + kd, k \in [\![0, \mathrm{Card}(B) - 1]\!]\}.$$

**5** Soit $A$, $B$ des parties finies non vides de $G$.

**a** Soit $H$ l'ensemble des éléments $g$ de $G$ tels que $A = g + A$. Montrer que $H$ est un sous-groupe fini de $G$.

**b** Montrer que $\mathrm{Card}(A + B) = \mathrm{Card}(A)$ si et seulement si il existe $b \in G$ tel que $B \subset b + H$.

**6** Étant donné deux parties $A$ et $B$ de $G$, on note

$$A - B = \{a - b, (a, b) \in A \times B\}$$

Lorsque ces parties ne sont pas vides, on pose aussi

$$d_R(A, B) = \ln\left(\frac{\mathrm{Card}(A - B)}{\sqrt{\mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B)}}\right)$$

Soit $A, B, C$ des parties finies et non vides de $G$. Démontrer que $d_R(A, B) \geqslant 0$. Démontrer aussi l'« inégalité triangulaire »

$$d_R(A, C) \leqslant d_R(A, B) + d_R(B, C)$$

**7** Soit $A$ et $B$ des parties finies non vides de $G$. Démontrer que $d_R(A, B) = 0$ si et seulement si il existe un sous-groupe fini $H$ de $G$ et des éléments $a, b$ de $G$ tels que $A = a + H$ et $B = b + H$.