

# Correction de l'épreuve X MP A (année 2018)

Frédéric Morlot et Jean Nougayrède

Note: l'énoncé nous invite tacitement à identifier  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ , ce que nous ferons donc.

## Préliminaire

1)  $(A|B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} \times b_{i,j}$ .

2) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\left( \sum_{j=1}^p a_{i,j} \times u_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2 \times \sum_{j=1}^p u_j^2 = \|u\|^2 \times \sum_{j=1}^p a_{i,j}^2$

On somme pour  $i$  entre 1 et  $n$  :  $\|Au\|^2 \leq \|u\|^2 \times \|A\|^2$ .

Par croissance de la fonction racine et positivité de la norme, on peut conclure :  $\boxed{\|Au\|_2 \leq \|A\|_F \times \|u\|_2}$ .

3) Soit  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $c_j$  la  $j$ -ième colonne de  $C$ .

D'après la question précédente,  $\|Ac_j\|_2^2 \leq \|A\|^2 \times \|c_j\|_2^2$ .

Notons que  $Ac_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $AC$  donc par définition,  $\|AC\|^2 = \sum_{j=1}^q \|Ac_j\|^2$

puis  $\|AC\|^2 \leq \|A\|^2 \times \sum_{j=1}^q \|c_j\|^2 = \|A\|^2 \times \|C\|^2$ .

Conclusion :  $\boxed{\|AC\|_F \leq \|A\|_F \times \|C\|_F}$

## Première partie

- 4)
  - Le rang de  $A$  est égal au rang de ses colonnes. Puisque  $A$  contient  $p$  colonnes, on a  $k \leq p$ .
  - Le rang de  $A$  est égal au rang de  $A^T$ . Le point précédent montre donc que  $k \leq n$ .
  - Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Puisque  $\lambda I_n$  est inversible, on a  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \times \lambda I_n) = \text{rg}(\lambda A)$ .

5) a) 

- Déjà, on a

$$S^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = S.$$

Donc  $S$  est symétrique.

- Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $S$ , et fixons  $x \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre associé. On a

$$\lambda \|x\|_2^2 = x^T S x = (x^T A)(A^T x) = \|A^T x\|_2^2.$$

Comme  $\|x\|_2^2 \in \mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

- Montrons enfin que  $\text{Im}(S) = \text{Im}(A)$ .

– Puisque  $S = AA^T$ , on a que  $\text{Im}(S) \subset \text{Im}(A)$ , et donc que  $\text{rg}(S) \leq \text{rg}(A)$ .

– Par ailleurs, soit  $x \in \text{Ker}(S)$ . Alors  $x^T AA^T x = 0$ , donc  $\|A^T x\|_2^2 = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(A^T)$ .  
Nous en tirons que  $\text{Ker}(S) \subset \text{Ker}(A^T)$ , puis par le théorème du rang, que

$$\text{rg}(S) \geq \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A).$$

– Par antisymétrie, nous en déduisons que  $\text{rg}(S) = \text{rg}(A)$ , et comme  $\text{Im}(S) \subset \text{Im}(A)$ , alors  $\text{Im}(S) = \text{Im}(A)$ .

b) Puisque  $AA^T u = Su = \lambda u \neq 0$ , on a nécessairement  $A^T u \neq 0$ , donc  $v \neq 0$ .

Par ailleurs, par définition de  $v$  on a

$$\tilde{S}v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A^T AA^T u = \sqrt{\lambda} A^T u = \lambda v.$$

Enfin, on a

$$\|v\|_2^2 = \frac{1}{\lambda} (A^T u)^T (A^T u) = \frac{1}{\lambda} u^T S u = \|u\|_2^2.$$

Comme ces deux nombres sont positifs, on a bien  $\|v\|_2 = \|u\|_2$ .

- 6) a) Par le théorème spectral,  $S$  est diagonalisable dans une base de  $\mathbb{R}^n$  orthonormée. Fixons une telle base  $(u_1, \dots, u_n)$ , et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  les valeurs propres associées. Quitte à permuter les  $u_j$ , supposons qu'on a

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Par le théorème du rang, le sous-espace propre de  $S$  associé à la valeur propre 0 est de dimension  $n - k$ . Autrement dit, on a

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n.$$

Posons  $P$  la matrice de  $(u_1, \dots, u_n)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et définissons  $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$  comme la matrice constituée par les  $k$  premières colonnes de  $P$ . Autrement dit, on peut écrire par blocs :

$$P = \left( U \mid * \right).$$

Puisque  $P^T P = I_n$ , un produit par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} U^T \\ * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^T U & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a  $U^T U = I_k$  (on aurait aussi pu le voir par le fait que la famille  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormale). Par ailleurs, puisque  $P \times \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times P^T = S$ , un nouveau produit par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} U & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U^T \\ * \end{pmatrix} = U \Lambda U^T = S.$$

- b) • Pour montrer que  $\text{Im}(S) = \text{Im}(U)$ , on peut adapter le raisonnement de 5.a).  
 Alternativement, en posant  $B = U \times \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$ , on remarque que  $S = BB^T$ , et donc que  $\text{Im}(S) = \text{Im}(B)$  par le même raisonnement. Or comme la matrice  $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$  est inversible, on a  $\text{Im}(B) = \text{Im}(U)$ .  
 • On a  $(UU^T)^2 = UI_k U^T = UU^T$ , ce qui montre que  $UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice d'un projecteur  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .  
 De plus, une nouvelle application de 5.a) montre que  $\text{Im}(UU^T) = \text{Im}(U)$ . Donc  $q$  est un projecteur sur  $\text{Im}(U)$ .  
 Enfin,  $UU^T$  étant une matrice symétrique et la base canonique étant une base orthonormale,  $q$  est un projecteur symétrique. Par caractérisation de cours, c'est donc le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(U)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
- c) Rappelons que  $U$  est la matrice de  $(u_1, \dots, u_k)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $V$  peut être interprétée comme la matrice de  $(A^T u_1 / \sqrt{\lambda_1}, \dots, A^T u_k / \sqrt{\lambda_k})$ , famille qu'on pourra noter  $(v_1, \dots, v_k)$ .

Soit  $j_1, j_2 \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ . On a

$$v_{j_1}^T v_{j_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2}}} u_{j_1}^T S u_{j_2} = \sqrt{\frac{\lambda_{j_2}}{\lambda_{j_1}}} u_{j_1}^T u_{j_2}.$$

Puisque  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormale, il en est de même de  $(v_1, \dots, v_k)$ . Donc  $V^T V = I_k$ .

Enfin, d'après 5.b), chaque  $v_j$  est un vecteur propre de  $\tilde{S}$  pour la valeur propre  $\lambda_j$ . En appliquant 5.a) à  $A^T$  et  $\tilde{S}$ , on obtient que

$$\text{rg}(\tilde{S}) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = k.$$

Donc par le théorème du rang, on a  $\dim(\text{Ker}(\tilde{S})) = p - k$ . Comme les sous-espaces propres de  $\tilde{S}$  sont en somme directe orthogonale (car  $\tilde{S}$  est symétrique), on peut concaténer  $(v_1, \dots, v_k)$  avec une base orthonormale de  $\text{Ker}(\tilde{S})$  pour obtenir une base orthonormale de  $\mathbb{R}^p$  notée  $(v_1, \dots, v_p)$ . Puis le même raisonnement qu'en a) montre que  $\tilde{S} = V\Lambda V^T$ .

*Note: si on ne voulait pas réutiliser les questions précédentes, on pouvait aussi rédiger une démonstration autonome qui fonctionnait très bien.*

7) On a  $U\Sigma V^T = U\Sigma D^T U^T A = UU^T A$ .

Or  $UU^T$  est la matrice d'un projecteur sur  $\text{Im}(U)$ . Par ailleurs, 6.b) montre que  $\text{Im}(U) = \text{Im}(S)$ , et 5.a) montre que  $\text{Im}(S) = \text{Im}(A)$ . Donc  $UU^T$  induit l'identité sur  $\text{Im}(A)$ , si bien que  $UU^T A = A$ .

### Deuxième partie

8) a) Par le théorème de Pythagore, il suffit de vérifier que  $A - \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T$  et  $\tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T$  sont orthogonaux au sens de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ . Or on a

$$\begin{aligned} \langle A - \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T, \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T \rangle_F &= \text{Tr}((A^T - \tilde{V}\tilde{V}^T A^T)\tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T) \\ &= \text{Tr}(A^T \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T) - \text{Tr}(\tilde{V}\tilde{V}^T A^T \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T) \\ &= \text{Tr}(A^T \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T) - \text{Tr}(A^T \tilde{A} \underbrace{\tilde{V}^T \tilde{V}}_{=I_\ell} \tilde{V}^T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Cette fois, on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 &= \text{Tr}(\tilde{V}\tilde{V}^T A^T \tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T) \\ &= \text{Tr}(\tilde{V}\tilde{V}^T V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T \tilde{V}\tilde{V}^T) \\ &= \text{Tr}(\tilde{V}\tilde{V}^T V \Sigma^2 V^T \tilde{V}\tilde{V}^T) \\ &= \text{Tr}(\Sigma^2 V^T \tilde{V}\tilde{V}^T \tilde{V}\tilde{V}^T V) \\ &= \text{Tr}(\Sigma^2 V^T \tilde{V}\tilde{V}^T V) \\ &= \langle \Sigma^2, V^T \tilde{V}\tilde{V}^T V \rangle_F. \end{aligned}$$

En utilisant les préliminaires, il vient

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 &= \sum_{h=1}^k \lambda_h (V^T \tilde{V}\tilde{V}^T V)_{h,h} \\ &= \sum_{h=1}^k \left( \lambda_h \sum_{m=1}^{\ell} (V^T \tilde{V})_{h,m} (\tilde{V}^T V)_{m,h} \right) \\ &= \sum_{h=1}^k \left( \lambda_h \sum_{m=1}^{\ell} (V^T \tilde{V})_{h,m}^2 \right). \end{aligned}$$

Soit  $h \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $m \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . On a

$$(V^T \tilde{V})_{h,m} = \sum_{i=1}^p (V)_{i,h} (\tilde{V})_{i,m} = \langle v_h, \tilde{v}_m \rangle_2,$$

ce qui permet de conclure.

9) a) • Soit  $i \in \llbracket \ell + 1, k \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . En tant que somme de réels positifs,  $a_i$  est un réel positif. Par ailleurs, la relation  $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_\ell$  montre que la famille  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_\ell)$  est orthonormale. Complétons-la en une base orthonormale de  $\mathbb{R}^p$ , notée  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_p)$ . Puisque  $v_j$  est unitaire, on peut écrire

$$b_j = \sum_{m=\ell+1}^p \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2 \geq 0.$$

- De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^k a_i &= \ell - \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{\ell} \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2 - \sum_{i=\ell+1}^k \sum_{m=1}^{\ell} \langle v_i, \tilde{v}_m \rangle_2^2 \\ &= \ell - \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{j=1}^k \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2. \end{aligned}$$

Soit  $m \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ . Rappelons qu'en 6.c), on a complété  $(v_1, \dots, v_k)$  en une base orthonormale  $(v_1, \dots, v_p)$ . On a alors

$$\sum_{m=1}^{\ell} \sum_{j=1}^k \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2 \leq \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{j=1}^p \langle v_j, \tilde{v}_m \rangle_2^2 = \sum_{m=1}^{\ell} \|\tilde{v}_m\|_2^2 = \ell,$$

ce qui permet de conclure.

- b) • La question 8.b) montre que

$$\begin{aligned} \|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 &= \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j(1 - b_j) + \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i \\ &= \sum_{h=1}^{\ell} \lambda_h - \left( \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j b_j - \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i \right). \end{aligned}$$

Comme les  $a_i$  et les  $b_j$  sont positifs, on a

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j b_j \geq \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{\ell} b_j \\ \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i \leq \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_{\ell} a_i \end{cases}$$

puis

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j b_j - \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i \geq \lambda_{\ell} \times \left( \sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^k a_i \right).$$

Et comme  $\sum_{i=\ell+1}^k a_i \leq \sum_{j=1}^{\ell} b_j$  et  $\lambda_{\ell} \geq 0$ , alors  $\|A\tilde{V}\tilde{V}^T\|_F^2 \leq \sum_{h=1}^{\ell} \lambda_h$ .

- Il y a égalité ssi

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{\ell} b_j \\ \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_{\ell} a_i \\ \lambda_{\ell} \times \left( \sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^k a_i \right) = 0 \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j - \lambda_{\ell}) b_j = 0 \\ \sum_{i=\ell+1}^k \underbrace{(\lambda_{\ell} - \lambda_i)}_{\geq \lambda_{\ell} - \lambda_{\ell+1} > 0} \underbrace{a_i}_{\geq 0} = 0 \\ \sum_{i=\ell+1}^k a_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \quad (\text{car } \lambda_{\ell} > 0) \end{cases}$$

La deuxième ligne du système implique que tous les  $a_i$  sont nuls. Conjointement avec les autres lignes du système, on en déduit qu'il y a égalité ssi

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, b_j = 0 \\ \forall i \in \llbracket \ell + 1, k \rrbracket, a_i = 0 \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, v_j \in \{\tilde{v}_{\ell+1}, \dots, \tilde{v}_p\}^\perp = \text{Vect}(\{\tilde{v}_{\ell+1}, \dots, \tilde{v}_p\})^\perp = \text{Im}(\tilde{V})^{\perp\perp} = \text{Im}(\tilde{V}) \\ \forall i \in \llbracket \ell + 1, k \rrbracket, v_i \in \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_\ell\}^\perp = \text{Vect}(\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_\ell\})^\perp = \text{Im}(\tilde{V})^\perp \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} \text{Vect}(\{v_1, \dots, v_\ell\}) \subset \text{Im}(\tilde{V}) \\ \text{Vect}(\{v_{\ell+1}, \dots, v_k\}) \subset \text{Im}(\tilde{V})^\perp \end{cases}$$

– Supposons que

$$\begin{cases} \text{Vect}(\{v_1, \dots, v_\ell\}) \subset \text{Im}(\tilde{V}) \\ \text{Vect}(\{v_{\ell+1}, \dots, v_k\}) \subset \text{Im}(\tilde{V})^\perp \end{cases}$$

La première ligne fournit  $\ell \leq \text{rg}(\tilde{V})$ , or on a  $\text{rg}(\tilde{V}) \leq \ell$  car  $\tilde{V}$  comporte  $\ell$  colonnes. On a donc  $\ell = \text{rg}(\tilde{V})$ , puis la première ligne fournit

$$\text{Vect}(\{v_1, \dots, v_\ell\}) = \text{Im}(\tilde{V}).$$

– Réciproquement, supposons que  $\text{Vect}(\{v_1, \dots, v_\ell\}) = \text{Im}(\tilde{V})$ . Alors la première ligne est trivialement satisfaite. De plus, on a bien

$$\text{Vect}(\{v_{\ell+1}, \dots, v_k\}) \subset \text{Vect}(\{v_{\ell+1}, \dots, v_p\}) = \text{Im}(\tilde{V})^\perp,$$

donc la deuxième ligne est également satisfaite.

Ainsi l'équivalence est démontrée.

c) On considère  $\tilde{V} \in M_{p,\ell}(\mathbb{R})$  dont la famille des colonnes est une base orthonormale de  $\text{Ker}(M)^\perp$ .

On constate alors que  $\tilde{V}^T \tilde{V} = I_\ell$  et  $\tilde{V} \tilde{V}^T$  est la projection orthogonale sur  $\text{Ker}(M)^\perp$ .

Donc  $I_p - \tilde{V} \tilde{V}^T$  est la projection orthogonale sur  $\text{Ker}(M)$  et on en déduit que  $M(I_p - \tilde{V} \tilde{V}^T) = 0$  donc  $M = M \tilde{V} \tilde{V}^T$ .

Pour la suite, posons  $P = \tilde{V} \tilde{V}^T$ .

Vérifions d'abord l'orthogonalité suivante en notant que  $P^T = P$  :

$$\begin{aligned} (A(I_p - P))(A - M)P &= \text{Tr}(A(I_p - P)P(A^T - M^T)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule en utilisant le théorème de Pythagore (et la relation  $M = MP$  :

$$\begin{aligned} \|A - M\|^2 &= \|A - AP + AP - MP\|^2 \\ &= \|A - AP\|^2 + \|AP - MP\|^2 \\ &= \|A - AP\|^2 + \|AP - M\|^2 \\ &\geq \|A - AP\|^2 \end{aligned}$$

Un calcul essentiellement direct donne  $\|A\|^2 = \sum_{h=1}^k \lambda_h$  donc d'après les questions, 8a et 9b,

$$\boxed{\|A - M\|^2 \geq \sum_{h=\ell+1}^k \lambda_h}$$

Soit  $M$  vérifiant le cas d'égalité.

Alors, d'après la démonstration de l'inégalité,  $M = AP$  et  $P$  est la projection orthogonale sur  $\text{Im}(\widetilde{V})$ .  
 Mais, d'après la question 9b,  $\text{Im}(\widetilde{V}) = \text{Vect}((v_1, \dots, v_\ell))$ .  
 Notons  $P_0$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}((v_1, \dots, v_\ell))$ .  
 Alors  $M = AP_0$  ce qui achève, sous réserve d'existence, la démonstration de l'unicité d'un point  $M$

en lequel  $\|A - M\|^2 = \sum_{h=\ell+1}^k \lambda_h$ .

Il reste à vérifier que  $U_* \Sigma_* V_*^T$  convient.

Écrivons  $U, \Sigma$  et  $V$  par blocs :

$$U = \begin{pmatrix} U_* & U_1 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_* & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} V_* & V_1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs donne alors  $A = U \Sigma V^T = U_* \Sigma_* V_*^T + U_1 \Sigma_1 V_1^T$ .

Donc  $\|A - U_* \Sigma_* V_*^T\|^2 = \|U_1 \Sigma_1 V_1^T\|^2 = \sum_{h=\ell+1}^k \lambda_h$  car  $U_1^T U_1 = V_1^T V_1 = I_{k-\ell}$ .

Il reste à constater que  $\text{rg}(U_* \Sigma_* V_*^T) = \ell$  (démonstration similaire à celle de la question 13b).

Conclusion : le cas d'égalité est réalisé si et seulement si  $M = U_* \Sigma_* V_*^T$ .

### Troisième partie

- 10) a) Soit  $x \in \text{Ker}(M_{V,W})$ . On présente  $x$  par blocs :  $x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  avec  $X_1 \in M_{k,1}(\mathbb{R})$  et  $X_2 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ .

$M_{V,W}x = 0$  donc  $VX_1 + X_2 = 0$  et  $W^T X_2 = 0$ .

Donc  $W^T VX_1 + W^T X_2 = 0$  puis  $W^T VX_1 = 0$ .

Par inversibilité de  $W^T V$ , on en déduit  $X_1 = 0$  puis  $X_2 = -VX_1 = 0$ .

Ainsi,  $\text{Ker}(M_{V,W}) \subset \{0\}$ .

Conclusion :  $M_{V,W}$  est inversible.

- b) • Prouvons déjà l'indication. Soit donc  $z \in \text{Im}(W)^\perp$ . On a

$$\|W^T z\|_2^2 = z^T \underbrace{W W^T}_{\in \text{Im}(W)} z = 0,$$

ce qui montre que  $W^T z = 0$ .

- Maintenant, soit  $z \in \text{Im}(W)^\perp \cap \text{Im}(V)$ . En écrivant  $z$  sous la forme  $Vx$ , on obtient par le point précédent

$$W^T Vx = 0 \quad \text{donc} \quad x = 0$$

(car  $W^T V$  est inversible). Puis  $z = 0$ , ce qui montre que  $\text{Im}(W)^\perp$  et  $\text{Im}(V)$  sont en somme directe.

- Puisque

$$k = \text{rg}(W^T V) \leq \text{rg}(W^T), \text{rg}(V) \leq k,$$

c'est que nécessairement,  $\text{rg}(V) = \text{rg}(W^T) = k$ . On en déduit que

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}(W)^\perp) = p - \text{rg}(W) = p - \text{rg}(W^T) = p - k \\ \dim(\text{Im}(V)) = k \end{cases}$$

Finalement, on a  $\dim(\text{Im}(W)^\perp \oplus \text{Im}(V)) = p$ , ce qui montre que  $\text{Im}(W)^\perp \oplus \text{Im}(V) = \mathbb{R}^p$ .

- c) • Soit  $z \in \text{Im}(V)$ , qu'on écrit sous la forme  $Vx$ . On a

$$\begin{aligned} P_{V,W} z &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix} \times V \times x \\ &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M_{V,W}^{-1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} V \\ 0_k \end{pmatrix}}_{= M_{V,W} \times \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p,k} \end{pmatrix}} \times x \\ &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p,k} \end{pmatrix} \times x \\ &= Vx \\ &= z. \end{aligned}$$

- Maintenant, soit  $z \in \text{Im}(W)^\perp$ . On a

$$\begin{aligned}
 P_{V,W}z &= (V \ 0_p) \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix} \times z \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} V & 0_p \\ \hline & \end{pmatrix}}_{=(V(W^T V)^{-1} W^T \quad -V(W^T V)^{-1}) \times M_{V,W}} \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} z \\ 0_{k,1} \end{pmatrix} \\
 &= V(W^T V)^{-1} W^T z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- Conclusion :  $P_{V,W}$  est la projection sur  $\text{Im}(V)$  parallèlement à  $\text{Im}(W)^\perp$ .

- 11) Dans la suite, nous utilisons régulièrement le fait que la forme coordonnée qui à une matrice associe l'un de ses termes est une application continue. C'est immédiat, puisqu'une telle forme coordonnée est une application linéaire, et qu'on travaille en dimension finie.

$GL_q(\mathbb{R})$  est un ouvert, car c'est l'image réciproque de  $\mathbb{R}^*$  par l'application  $M \mapsto \det(M)$ , qui est continue car polynomiale en les coefficients de  $M$ . Puis la formule de la comatrice montre que, lorsque  $M$  est inversible, les coefficients de  $M^{-1}$  s'écrivent comme des fonctions rationnelles en les coefficients de  $M$ . Chaque terme de  $M^{-1}$  est donc continu en les coefficients de  $M$ , ce qui suffit à conclure.

- 12) Posons  $\varphi : W \mapsto W^T V$ . C'est une application linéaire, donc elle est continue. Or  $\varphi(V) \in GL_k(\mathbb{R})$ , qui est ouvert. Donc pour  $W$  suffisamment proche de  $V$ , on a  $\varphi(W) \in GL_k(\mathbb{R})$ .

Puis l'application  $W \mapsto M_{V,W}$  est évidemment continue sur  $\mathcal{V}$  (chaque coefficient de  $M_{V,W}$  étant polynomial en les coefficients de  $W$ ), si bien que par composition, l'application  $W \mapsto M_{V,W}^{-1}$  est continue. Enfin, l'application

$$M \mapsto (V \ 0_p) \times M \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix}$$

est continue car linéaire. On conclut à nouveau par composition.

### Quatrième partie

- 13) a)  $U^T U = I_k$  donc  $\mathbb{R}^k \subset \text{Im}(U^T)$  donc  $\text{rg}(U) = \text{rg}(U^T) \geq k$ .  
 $U \in M_{n,k}(\mathbb{R})$  donc  $\text{rg}(U) \leq k$ .  
 Finalement,  $\text{rg}(U) = k$  et il existe une matrice extraite de  $U$  inversible de taille  $k$ .  
 Par continuité du déterminant, cette même matrice inversible, perturbée par  $t\bar{U}$  reste inversible pourvu que  $t$  soit assez proche de 0.  
 Donc  $\text{rg}(U + t\bar{U}) \geq k$  au voisinage de 0.  
 On a aussi  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{rg}(U + t\bar{U}) \leq k$  car  $U + t\bar{U}$  possède  $k$  colonnes.  
 Conclusion :  $t \mapsto \text{rg}(U + t\bar{U})$  est constante au voisinage de 0 (égale à  $k$ ).  
 On démontre de même que  $\text{rg}(V) = \text{rg}(\Sigma) = k$  puis que  $t \mapsto \text{rg}(V + t\bar{V})$  et  $t \mapsto \text{rg}(\Sigma + t\bar{\Sigma})$  sont constantes, égales à  $k$  au voisinage de 0
- b) Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{E}$  trois matrices de rang  $k$ . Notons déjà que  $ABC^T \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ .  
 Montrons que  $\text{rg}(ABC^T) = k$ .  
 Déjà,  $\text{rg}(C) = k$  donc  $\text{rg}(C^T) = k$  puis  $\text{Im}(C^T) = \mathbb{R}^k$ .  
 $B \in M_k(\mathbb{R})$  et  $\text{rg}(B) = k$  donc  $B$  est inversible et  $\text{Im}(BC^T) = \mathbb{R}^k$ .  
 On en déduit  $\text{Im}(ABC^T) = \text{Im}(A)$  donc  $\text{rg}(ABC^T) = \text{rg}(A) = k$ .  
 En exploitant ce qui précède et la question 13(a), on en déduit que  $\gamma(t) \in M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  au voisinage de  $t = 0$ .
- c)  $\gamma$  est polynomiale en  $t$  donc indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 D'après la formule de dérivation d'un produit et par linéarité de la transposition,

$$\gamma'(0) = \bar{U}\Sigma V^T + U\bar{\Sigma}V^T + U\Sigma\bar{V}^T$$

- 14) a) D'après la question précédente et par définition d'un vecteur tangent, tout vecteur qui s'écrit sous la forme  $\bar{U}\Sigma V^T + U\bar{\Sigma}V^T + U\Sigma\bar{V}^T$  est vecteur tangent à  $M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  en  $A$  donc a fortiori,

tout vecteur de  $T_A$  est un vecteur tangent à  $M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  en  $A$ .

Notons  $F = \{\bar{U} \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \mid \bar{U}^T U = 0_k\}$  et  $G = \{\bar{V} \in M_{p,k}(\mathbb{R}) \mid \bar{V}^T V = 0_k\}$ .

Posons  $\varphi : \begin{cases} F \times M_k(\mathbb{R}) \times G \rightarrow M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{V}) \mapsto \bar{U}\Sigma V^T + U\bar{\Sigma}V^T + U\Sigma\bar{V}^T \end{cases}$ .

$F$  et  $G$  sont bien deux sous-espaces vectoriels respectivement de  $M_{n,k}(\mathbb{R})$  et de  $M_{p,k}(\mathbb{R})$ .

$\varphi$  est bien définie et linéaire, d'image  $T_A$ .

Donc  $T_A$  est un sous-espace vectoriel de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Montrons maintenant que  $\varphi$  est injective.

Soit  $(A, B, C) \in \text{Ker}(\varphi)$ .

Alors  $A\Sigma V^T + UBV^T + U\Sigma C^T = 0_{n,p}$ .

On multiplie à droite par  $V$  et on exploite que  $C^T V = 0$  et  $V^T V = I_k$  :

$A\Sigma + UB = 0$ .

On multiplie à gauche par  $U^T$  et on note que  $A^T U = 0$  donc  $U^T A = 0$  et  $U^T U = I_k$ .

$B = 0$ .

On réinjecte dans ce qui précède pour obtenir  $A\Sigma = 0$  puis  $A = 0$  par inversibilité de  $\Sigma$ .

On réinjecte encore :  $U\Sigma C^T = 0$ . On multiplie à gauche par  $\Sigma^{-1}U^T$  :  $C^T = 0$  puis  $C = 0$ .

$\varphi$  est donc injective.

Ainsi, d'après la formule du rang,  $\dim(T_A) = \dim(F \times M_k(\mathbb{R}) \times G) = \dim(F) + \dim(M_k(\mathbb{R})) + \dim(G)$

On sait que  $\dim(M_k(\mathbb{R})) = k^2$ .

Posons  $f : \begin{cases} M_{n,k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k,k}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T U \end{cases}$ .

$f$  est bien définie, linéaire et  $F = \text{Ker}(f)$ .

Or  $f$  est surjective. En effet, si  $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ , on peut poser  $B = UA^T$ .

On a  $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$  et  $f(B) = B^T U = UA^T U = A$ .

D'après la formule du rang,  $\dim(F) = \dim(M_{n,k}(\mathbb{R})) - \dim(M_{k,k}(\mathbb{R})) = k(n - k)$ .

De même,  $\dim(G) = k(p - k)$ .

Conclusion :  $\dim(T_A) = k(n - k) + k(p - k) + k^2 = np - (n - k)(p - k)$

- b) Commençons par montrer que  $N_A \subset T_A^\perp$ .

Soit  $X \in N_A$  et  $(B, C, D) \in F \times M_{k,k}(\mathbb{R}) \times G$ .

Posons  $M = B\Sigma V^T + UCV^T + U\Sigma D^T$  et notons que  $X^T U = XV = 0$  donc  $V^T X^T = 0$ .

On calcule :  $X^T M = X^T B\Sigma V^T$ .

Donc  $(X|M) = \text{Tr}(X^T M) = \text{Tr}(X^T B\Sigma V^T) = \text{Tr}(B\Sigma V^T X^T) = 0$

Conclusion :  $N_A \subset T_A^\perp$ .

Vérifions l'égalité des dimensions, *i.e.* que  $\dim(N_A) = \dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) - \dim(T_A) = (n - k)(p - k)$ .

$U$  et  $V$  sont deux matrices de rang  $k$  à  $k$  colonnes.

Il existe donc  $P, Q, R, S$  des matrices inversibles telles que  $U = P \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} Q$  et  $V = R \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{p-k,k} \end{pmatrix} S$ .

Soit  $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $Y = P^T X R$ .

On écrit  $Y$  par blocs :  $Y = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  avec  $B \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \in N_A &\Leftrightarrow XV = 0 \text{ et } X^T U = 0 \\ &\Leftrightarrow P^T X R \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{p-k,k} \end{pmatrix} = 0 \text{ et } R^T X^T P \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow Y \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{p-k,k} \end{pmatrix} \text{ et } Y^T \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} B^T \\ C^T \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} R^{-1} \end{aligned}$$



La fonction  $E \mapsto (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} R^{-1}$  permet donc de définir un isomorphisme de  $M_{n-k,p-k}(\mathbb{R})$  vers  $N_A$ .  
On en déduit que  $\dim(N_A) = \dim(M_{n-k,p-k}(\mathbb{R})) = (n-k)(p-k)$ .  
Conclusion :  $N_A$  est l'orthogonal de  $T_A$  dans  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

15) a) Supposons que  $\tilde{A}$  vérifie (C).

Alors  $\text{rg}(\tilde{A}V V^T) = \text{rg}(\tilde{A})$ .

Par ailleurs,  $\text{Ker}(V^T) \subset \text{Ker}(\tilde{A}V V^T)$  donc  $\dim(\text{Ker}(V^T)) \leq \dim(\text{Ker}(\tilde{A}V V^T))$ .

La formule du rang donne alors  $p - \text{rg}(V^T) \leq p - \text{rg}(\tilde{A}V V^T)$

qui donne alors directement  $\text{rg}(\tilde{A}) \leq \text{rg}(V) = k$ .

Conclusion :  $\text{rg}(\tilde{A}) \leq k$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(\tilde{A})$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ .

$(x | \tilde{A}^T U U^T y) = y^T U U^T \tilde{A} x = 0$ .

Donc  $\text{Ker}(\tilde{A}) \subset \text{Im}(\tilde{A}^T U U^T)^\perp = \text{Im}(\tilde{A}^T)^\perp$ .

On conclut à l'égalité par égalité des dimensions (conséquence directe de la formule du rang et de la dimension de l'orthogonal).

Conclusion :  $\text{Im}(\tilde{A}^T U U^T)^\perp = \text{Ker}(\tilde{A})$ .

b) Posons  $f : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \det(V^T X^T U) \end{cases}$ .

Par continuité de la transposition, du produit matriciel et du déterminant,  $f$  est continue.

$f(A) = \det(V^T A^T U) = \det(V^T (U \Sigma V^T)^T U) = \det(V^T V \Sigma^T U^T U) = \det(\Sigma^T) \neq 0$  car  $\Sigma$  est inversible.

Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall X \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \|X - A\|_F < \varepsilon \Rightarrow f(X) \neq 0$ .

Vérifions que  $\varepsilon$  convient.

Soit  $X \in M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  tel que  $\|X - A\| < \varepsilon$ .

Montrons que  $\text{Im}(XV V^T) = \text{Im}(X)$  et  $\text{Im}(X^T U U^T) = \text{Im}(X^T)$ .

Les deux inclusions directes sont immédiates et il reste à montrer l'égalité des dimensions *i.e.*  $\text{rg}(XV V^T) = \text{rg}(X^T U U^T) = k$ .

$V^T X^T U$  est inversible (car  $f(X) \neq 0$ ) et de taille  $k$  donc  $\text{rg}(V^T X^T U) = k$ .

$\text{Im}(V^T X^T U) \subset \text{Im}(V^T X^T)$  donc  $k \leq \text{rg}(V^T X^T) = \text{rg}(XV)$ .

$XV$  contient  $k$  colonnes donc  $\text{rg}(XV) \leq k$  puis  $\text{rg}(XV) = k$ .

Enfin,  $\text{rg}(V^T) = k$  et  $\text{Im}(V^T) \subset \mathbb{R}^k$  donc  $\text{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k$

puis  $\text{Im}(XV V^T) = \text{Im}(XV)$  et  $\text{rg}(XV V^T) = \text{rg}(XV) = k$ .

On a aussi  $\text{Ker}(X^T U) \subset \text{Ker}(V^T X^T U)$  donc  $k = \text{rg}(V^T X^T U) \leq \text{rg}(X^T U) \leq k$  puis  $\text{rg}(X^T U) = k$ .

Ensuite,  $\text{rg}(U^T) = k$  donc  $\text{Im}(U^T) = \mathbb{R}^k$  puis  $\text{Im}(X^T U U^T) = \text{Im}(X^T U)$ .

Donc  $\text{rg}(X^T U U^T) = \text{rg}(X^T U) = k$ .

Conclusion :  $X$  vérifie la condition (C) et  $\varepsilon$  convient.

16) a) On a directement l'inclusion  $N_A \subset \text{Ker}(\Phi)$ .

Soit  $X \in \text{Ker}(\Phi)$ .

Alors  $X^T U U^T = 0$  et  $XV V^T = 0$ .

On multiplie par  $U$  à droite dans la première égalité et par  $V$  à droite dans la deuxième et on obtient  $X^T U = 0$  et  $XV = 0$ . Donc  $X \in N_A$ .

Conclusion :  $N_A = \text{Ker}(\Phi)$ .

b)  $\Phi$  et  $\Phi \circ \pi_A$  sont deux fonctions linéaires définies sur  $M_{n,p}(\mathbb{R}) = T_A \oplus N_A$ .

On vérifie donc leur égalité en vérifiant qu'elles coïncident sur  $N_A$  et sur  $T_A$ .

Soit  $X \in N_A$ .

$\Phi(X) = (0, 0)$  d'après ce qui précède et  $\Phi(\pi_A(X)) = \Phi(0) = (0, 0)$  car  $X \in \text{Ker}(\pi_A)$ .

Soit  $X \in T_A$ . Alors  $\pi_A(X) = X$  donc  $\Phi(\pi_A(X)) = \Phi(X)$ .

Conclusion :  $\Phi = \Phi \circ \pi_A$ .

c) Commençons par montrer que  $\mathbb{R}^p = \text{Im}(V) \oplus \text{Im}(W)^\perp$ .

Soit  $f : \begin{cases} \text{Im}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \tilde{A}x \end{cases}$ .

$f$  est bien définie et linéaire.

$\text{Ker}(f) = \text{Im}(V) \cap \text{Ker}(\tilde{A})$ .

$\text{Im}(f) = \text{Im}(\tilde{A}V) = \text{Im}(\tilde{A}V V^T) = \text{Im}(\tilde{A})$  (on rappelle que  $\text{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k$ ).

D'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Im}(V) \cap \text{Ker}(\tilde{A})) = \text{rg}(V) - \text{rg}(\tilde{A}) = k - k = 0$  donc  $\text{Im}(V) \oplus \text{Ker}(\tilde{A})$  existe.

Or, d'après la question 15(a),  $\text{Ker}(\tilde{A}) = \text{Im}(W)^\perp$  donc  $\text{Im}(V) \oplus \text{Im}(W)^\perp$  existe (c'est un sev de  $\mathbb{R}^p$ ).  
 $\dim(\text{Im}(V) \oplus \text{Im}(W)^\perp) = \text{rg}(V) + (p - \text{rg}(W)) = k + p - \text{rg}(\tilde{A}^T) = p$

Conclusion :  $\boxed{\text{Im}(V) \oplus \text{Im}(W)^\perp = \mathbb{R}^p}$ .

Pour vérifier l'égalité matricielle demandée, il suffit de vérifier successivement :

$$\forall x \in \text{Im}(V), \tilde{A}x = \tilde{A}VV^T P_{V,W}x$$

$$\text{et } \forall x \in \text{Im}(W)^\perp, \tilde{A}x = \tilde{A}VV^T P_{V,W}x.$$

Soit  $x \in \text{Im}(V)$ .

Il existe  $y \in \mathbb{R}^k$  tel que  $x = Vy$ .

$$\begin{aligned} \tilde{A}VV^T P_{V,W}x &= \tilde{A}VV^T x \\ &= \tilde{A}VV^T Vy \\ &= \tilde{A}Vy \\ &= \tilde{A}x \end{aligned}$$

Soit  $x \in \text{Im}(W)^\perp$ .

D'après 15(a),  $x \in \text{Ker}(\tilde{A})$  et par définition du projecteur,  $x \in \text{Ker}(P_{V,W})$

$$\text{donc } \tilde{A}x = 0 = \tilde{A}VV^T P_{V,W}x.$$

Conclusion :  $\boxed{\tilde{A} = \tilde{A}VV^T P_{V,W}}$ .

17) On prend le  $\varepsilon$  de la question 15(b).

Soit  $X, Y \in M_{n,p}^k(\mathbb{R}) \cap B(A, \varepsilon/2)$  tel que  $\pi_A(X) = \pi_A(Y)$ .

Alors, d'après la question 16(b),  $\Phi(X) = \Phi(Y)$  donc  $XVV^T = YVV^T$  et  $X^TUU^T = Y^TUU^T$ .

Notons  $W = X^TUU^T = Y^TUU^T$ .

$X$  et  $Y$  vérifient la condition (C) donc d'après la question 16(c)

$$\begin{aligned} X &= XVV^T P_{V,W} \\ &= YVV^T P_{V,W} \\ &= Y \end{aligned}$$

Conclusion :  $\boxed{\varepsilon/2 \text{ convient}}$ .

18) a) Posons  $f : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ X \mapsto (I_n - UU^T)X(I_p - VV^T) \end{cases}$ .

$f$  est bien définie et linéaire. C'est un endomorphisme de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} f^2(X) &= (I_n - UU^T)^2 X (I_p - VV^T)^2 \\ &= (I_n - 2UU^T + UU^TUU^T) X (I_p - 2VV^T + VV^TVV^T) \\ &= (I_n - UU^T) X (I_p - VV^T) \\ &= f(X) \end{aligned}$$

$f$  est donc un projecteur de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in N_A$ .

Alors  $U^T X = 0$  et  $XV = 0$  donc un calcul direct donne  $f(X) = X$ .

Donc  $N_A \subset \text{Im}(f)$ .

Soit  $X \in \overline{\text{Im}(f)}$ .

Alors  $X = f(X) = X - UU^T X - XVV^T + UU^T XVV^T$ .

$$\begin{aligned} U^T X &= U^T X - U^T X - U^T XVV^T + U^T XVV^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

et de même,  $XV = 0$ . Donc  $\overline{\text{Im}(f)} \subset N_A$ .

Enfin, vérifions que  $f$  est un projecteur orthogonal.

Soit  $X \in \text{Ker}(f)$  et  $Y \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrons que  $(X|f(Y)) = 0$ .

$$\begin{aligned} (X|f(Y)) &= \text{Tr}(X((I_n - UU^T)B(I_p - VV^T))^T) \\ &= \text{Tr}(X(I_p - VV^T)B^T(I_n - UU^T)) \\ &= \text{Tr}((I_n - UU^T)X(I_p - VV^T)B^T) \\ &= \text{Tr}(f(X)B^T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$f$  est donc la projection orthogonale sur  $N_A$  :  $f = \rho_A$ .

Conclusion :  $\boxed{\forall \tilde{A} \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)\tilde{A}(I_p - VV^T)}$

b) Soit  $B \in M_p(\mathbb{R})$ .

Montrons que  $AB \in N_A^\perp$ , ce qui suffira pour conclure.

Soit  $X \in N_A$ . Notons que  $X^T U = 0$ .

$$\begin{aligned} (AB|X) &= \text{Tr}(X^T AB) \\ &= \text{Tr}(X^T U \Sigma V^T B) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $AB \in N_A^\perp = \text{Ker}(\rho_A)$ .

Conclusion :  $\boxed{\forall B \in M_p(\mathbb{R}), \rho_A(AB) = 0}$ .

c) On calcule :

$$(\tilde{A} - A)V V^T (P_{V,W} - P_{V,V}) = \tilde{A}V V^T P_{V,W} - AV V^T (P_{V,W} - P_{V,V}) - \tilde{A}V V^T P_{V,V} = \tilde{A} - AB - \tilde{A}V V^T P_{V,V} \text{ avec } B \in M_p(\mathbb{R}).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que  $\tilde{A}V V^T P_{V,V} \in \text{Ker}(\rho_A)$ .

$$V V^T \in M_p(\mathbb{R}), (V V^T)^2 = V V^T V V^T = V V^T$$

$$(V V^T)^T = V V^T \text{ et } \text{Im}(V V^T) = \text{Im}(V) \text{ car } \text{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k.$$

Donc  $V V^T$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(V)$  donc  $P_{V,V} = V V^T$

$$\text{puis } P_{V,V}(I_p - V V^T) = V V^T - V V^T V V^T = 0.$$

On en déduit que  $\rho_A(\tilde{A}V V^T P_{V,V}) = 0$ .

Conclusion :  $\boxed{\rho_A(\tilde{A}) = (I_n - UU^T)(\tilde{A} - A)(P_{V,W} - P_{V,V})(I_p - V V^T)}$ .

d) On calcule :

$$\begin{aligned} \|I_n - UU^T\|^2 &= \text{Tr}((I_n - UU^T)^T(I_n - UU^T)) \\ &= \text{Tr}((I_n - UU^T)(I_n - UU^T)) \\ &= \text{Tr}(I_n - UU^T) \\ &= n - \text{Tr}(UU^T) \\ &= n - \text{Tr}(U^T U) \\ &= n - k \end{aligned}$$

De même,  $\|I_p - V V^T\|^2 = p - k$  et  $\|V V^T\|^2 = \text{Tr}(V V^T V V^T) = \text{Tr}(V V^T) = \text{Tr}(V^T V) = k$

D'après la question 3, on peut conclure :  $\boxed{\|\rho_A(\tilde{A})\| \leq \sqrt{(n-k)k(p-k)} \times \|\tilde{A} - A\| \times \|P_{V,W} - P_{V,V}\|}$

19) Posons  $\lambda = \sqrt{(n-k)k(p-k)}$ .

Soit  $\delta > 0$  et  $f : ]-\delta, \delta[ \rightarrow M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  dérivable en 0 et vérifiant  $f(0) = A$ .

Montrons que  $f'(0) \in T_A$  i.e.  $\rho_A(f'(0)) = 0$ .

On peut choisir  $\varepsilon \in ]0, \delta[$  tel que  $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $f(t)$  vérifie la condition (C) (d'après la question 15b).

Remarquons que  $\rho_A(A) = 0$  d'après la question 18b.

Soit  $t \in ]0, \varepsilon[$ . On pose  $W_t = f(t)^T U U^T$ .

D'après la question 18d,  $\|\rho_A(f(t)) - \rho_A(f(0))\| \leq \lambda \|f(t) - f(0)\| \times \|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|$ .

On divise par  $t$  et on exploite l'homogénéité de la norme et la linéarité de  $\rho_A$  :

$$\left\| \rho_A \left( \frac{f(t) - f(0)}{t} \right) \right\| \leq \lambda \left\| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right\| \times \|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|.$$

Par continuité des fonctions linéaires en dimension finie et continuité de la norme, le membre de gauche converge vers  $\|\rho_A(f'(0))\|$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .

$t \rightarrow \frac{f(t) - f(0)}{t}$  est bornée au voisinage de  $0^+$  car  $f$  est dérivable en 0.

Il reste à montrer que  $\|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|$  converge vers 0 quand  $t$  tend vers  $0^+$ .

On commence par noter que  $\text{Im}(W_t) = \text{Im}(f(t)^T U V^T) = \text{Im}(f(t)^T U) = \text{Im}(f(t)^T U \Sigma^{-1})$ .

Donc  $P_{V,W_t}$  est le projecteur sur  $\text{Im}(V)$  parallèlement à  $\text{Im}(f(t)^T U \Sigma^{-1})^\perp$ .

Donc  $P_{V,W_t} = P_{V,H_t}$  en posant  $H_t = f(t)^T U \Sigma^{-1}$ .

Par continuité du produit matriciel et de la transposition,  $f(t)^T U \Sigma^{-1}$  tend vers  $A^T U \Sigma^{-1}$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .

Or  $A^T U \Sigma^{-1} = V \Sigma^T U^T U \Sigma^{-1} = V \Sigma \Sigma^{-1} = V$ .

On peut choisir  $\eta \in ]0, \varepsilon[$  tel que  $\forall t \in [0, \eta[, H_t \in \mathcal{V}$  ( $\mathcal{V}$  est défini dans la question 12).

$t \mapsto H_t$  est définie sur  $[0, \eta[$ , à valeurs dans  $\mathcal{V}$  et continue en 0.

$W \mapsto P_{V,W}$  est continue sur  $\mathcal{V}$ .

Par composition,  $t \mapsto P_{V,H_t}$  est définie sur  $[0, \eta[$  et continue en 0.

Donc  $P_{V,W_t}$  tend vers  $P_{V,H_0}$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ .

Or  $P_{V,H_0} = P_{V,V}$  car  $H_0 = V$ .

Donc  $P_{V,W_t}$  tend vers  $P_{V,V}$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ .

Par passage à la limite dans une inégalité dont tous les termes convergent, on en déduit  $\|\rho_A(f'(0))\| \leq 0$  puis  $f'(0) \in \text{Ker}(\rho_A) = N_A^\perp = T_A$ .

La question 13c a déjà démontré que tout vecteur de  $T_A$  est un vecteur tangent.

Conclusion :  $T_A$  est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à  $M_{n,p}^k(\mathbb{R})$  en  $A$