<u>Opérateur de Volterra et équations différentielles</u>

A. Opérateur de Volterra

1) Soit f et g dans E.

D'après le théorème fondamentale de l'analyse, $\mathrm{V}(f)$ et $-\mathrm{V}^*(f)$ sont des primitives f sur $[0,\pi/2]$ car f y est continue

De plus on a $\mathrm{V}(f)+\mathrm{V}^*(f) : x \mapsto \pi/2$, d'après la relation de Chasles et $\mathrm{V}(f)(0) = 0 = \mathrm{V}^*(f)(\pi/2)$

On utilise le théorème d'intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: $\mathrm{V}(f)$ et $-\mathrm{V}^*(g)$.

On a : $\langle \mathrm{V}(f), g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{V}(f)(x)g(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{V}(f)(x)(-\mathrm{V}^*(g)(x))\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{V}^*(g)(x)\mathrm{d}x$

On a bien $\boxed{\langle \mathrm{V}(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{V}^*(g)\rangle}$

2) $\mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}$ est bien un endomorphisme par composition.

Soit f et g dans E. On utilise deux fois la question précédente.

On a $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f), g\rangle = \langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(g)\rangle = \langle f, \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(g)\rangle$

On va montrer que : $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f), f\rangle = 0 \Longrightarrow f = 0_{\mathrm{E}}$

On suppose que : $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f), f\rangle = 0$ donc $0 = \langle \mathrm{V}(f), \mathrm{V}(f)\rangle = \|\mathrm{V}(f)\|^2$

donc $\mathrm{V}(f) = 0_{\mathrm{E}}$ et en dérivant $f = \mathrm{V}(f)' = 0_{\mathrm{E}}$

ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V} \text{ est symétrique défini positif}}$

Soit λ une valeur propre de $\mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}$ et f_λ un vecteur propre associé à λ

On a $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f_\lambda), f_\lambda\rangle = \|\mathrm{V}(f_\lambda)\|^2$

or $\mathrm{V}(f_\lambda) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car $f_\lambda \neq 0_{\mathrm{E}}$ et que $\mathrm{V}(f_\lambda)' = f_\lambda$

donc $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f_\lambda), f_\lambda\rangle > 0$

et on a $\langle \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f_\lambda), f_\lambda\rangle = \langle \lambda f_\lambda, f_\lambda\rangle = \lambda\|f_\lambda\|^2$

Comme $\|f_\lambda\|^2 > 0$, on en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \mathrm{V}^*\circ\mathrm{V} \text{ sont strictement positives}}$

3) On a $f_\lambda = \frac{1}{\lambda}\mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f_\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))$

À l'aide des observations du 1), on a $f_\lambda' = \frac{1}{\lambda}\mathrm{V}(f_\lambda)$ et $f_\lambda'' = \frac{1}{\lambda}f_\lambda$ ce qui prouve que $\boxed{f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2}$

De plus $f_\lambda(\pi/2) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{V}^*(\mathrm{V}(f_\lambda))(\pi/2) = 0$ et $f_\lambda'(0) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{V}(f_\lambda)(0)$

donc $\boxed{f_\lambda \text{ est solution de l'équation différentielle : } y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0 \text{ avec les conditions : } y(\pi/2) = 0 \text{ et } y'(0) = 0}$

4) <u>$\Longrightarrow$:</u> Soit λ est une valeur propre de $\mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

Par résolution de l'équation différentielle car $\lambda > 0$, on peut trouver A et B $\in\mathbb{R}$ tels que

$$f_\lambda : x \mapsto \mathrm{A}\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + \mathrm{B}\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) \text{ et on a } f_\lambda' : x \mapsto -\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\lambda}}\sin(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\lambda}}\cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$$

on a $0 = f_\lambda(\pi/2) = \mathrm{A}\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right)$ et $0 = f'(0) = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\lambda}}$

donc $\mathrm{B} = 0$ donc on a $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{A}\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Ainsi $f_\lambda \in \mathrm{vect}\left(x \mapsto \mathrm{A}\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$

et $\mathrm{A}\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = f_\lambda(\pi/2) = 0$

Comme $f_\lambda \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a $\mathrm{A} \neq 0$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$

ce qui nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

donc $2\sqrt{\lambda} = \dfrac{(2k+1)}{2}$

donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ en prenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n+1 = |2k+1|$

$\Longrightarrow$: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $f : x \mapsto \cos(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = \cos((2n+1)x)$

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $\mathrm{V}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos((2n+1)t)\mathrm{d}t = \Big[\frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}\Big]_0^x = \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

et $(\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V})(f)(x) = \displaystyle\int_x^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2}\Big]_x^{\pi/2} = \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} - \frac{\cos((2n+1)\pi/2)}{(2n+1)^2}$

Ainsi et $(\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V})(f)(x) = \lambda f(x)$

donc $(\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V})(f) = \lambda f$ et $f \neq 0_{\mathrm{E}}$

Conclusion : On en déduit que

$$\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V} \text{ si et seulement s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

Dans ce cas $\boxed{\mathrm{E}_{1/(2n+1)^2}(\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}) = \mathrm{vect}\Big(x \longmapsto \cos((2n+1)x)\Big)}$

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

5) $\boxed{\mathrm{S}_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } x \text{ de loi donnée par } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$

On utilise pour tout $0 < k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = n\dfrac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

On a $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$

ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = nx\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} x^j(1-x)^{n-1-j}$ par changement d'indice : $j = k-1$

et si $n \geqslant 2$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2 - \mathrm{S}_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$ par la formule du transfert

donc $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2 - \mathrm{S}_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$

donc $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2 - \mathrm{S}_n) = n(n-1)x^2\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2$ valable même si $n = 1$

donc $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2 - \mathrm{S}_n) + \mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = n(n-1)x^2 + nx$

donc $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)^2 = n^2x^2 - nx^2 + nx - (nx)^2$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = nx \text{ et } \mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = nx(1-x)}$ (comme prévu)

6) D'après Irénée-Jules Bienaymé et Pafnouti Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant n\alpha\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)}{(n\alpha)^2}$$

or $\dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)}{(n\alpha)^2} = \dfrac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} = \dfrac{x(1-x)}{n\alpha^2}$

Une étude classique de variations nous donne $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1/4$.

donc $\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant n\alpha\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\alpha^2}$

or $(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant n\alpha) = (|\mathrm{S}_n - nx| \geqslant n\alpha) = \left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right) = \displaystyle\bigcup_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} (\mathrm{S}_n = k)$

donc $\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant n\alpha\right) = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$ par réunion disjointe

donc on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}}$

7) On a $\mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}(f(\mathrm{Z}_n)) = \mathbb{E}(f(\mathrm{S}_n/n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$ selon la formule du transfert

donc $\mathrm{B}_n(f)(x) = \dbinom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(\dfrac{k}{n})$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f(x) = (x+1-x)^n f(x) = f(x)$

En faisant la soustraction : $\boxed{\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)}$

Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc y est bornée uniformément continue d'après le théorème de Heine. On note $\|f\|_\infty$ la norme infinie de f sur $[0,1]$.

L'uniforme continuité de f nous fournit $\alpha > 0$ tel que : $\forall y, z \in [0,1],\ |y-z| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)\right| &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| \text{ selon l'inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|<\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'autre part, on a

$$\left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n})-f(x)\right)\right|\leqslant\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\left|f(\frac{k}{n})\right|+|f(x)|\right)\text{ inégalité triangulaire}$$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\left|\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |\frac{k}{n}-x|\geqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(\frac{k}{n})-f(x)\right)\right|\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\text{ selon 6}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}=0$ Ceci nous fournit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant\mathrm{N}\Longrightarrow\left|\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

On vient de montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\mathrm{N}\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant\mathrm{N}\Longrightarrow(\forall x\in[0,1],\ |\mathrm{B}_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon)$$

$$\text{ou encore : }\|\mathrm{B}_n(f)-f\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{B}_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1]}$

C. Développement de $\mathrm{V}^*\circ\mathrm{V}(f)$ en série trigonométrique

8) Soit p un polynôme de degré n que l'on écrit $p(\mathrm{X})=\sum\limits_{n=0}^{n}a_k\mathrm{X}^k$ et on note $q_k:t\mapsto\cos^k(t)$ de sorte que : la fonction $t\longmapsto p(\cos(t))$ appartient à $\mathrm{vect}(q_0,\ldots,q_n)$

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Soit $t\in[0,\pi]$. Par la formule du binôme on a :

$$q_k(t)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^k=\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathrm{e}^{(2j-n)\mathrm{i}t}=\frac{1}{2^k}\sum_{0\leqslant 2j<n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{(2k-n)\mathrm{i}t}+\frac{1}{2^k}\sum_{n<2j\leqslant 2n}\binom{n}{j}\mathrm{e}^{(2j-n)\mathrm{i}t}+r$$

$$\text{où } r=\begin{cases}\frac{\binom{n}{n/2}}{2^k} & \text{si } n \text{ pair}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

donc avec le changement d'indice $p=n-kj$: $2j-n=2n-2p-n=-(2p-n)$

$$q_k(t)=\frac{1}{2^k}\sum_{0\leqslant j<n/2}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{(2k-n)\mathrm{i}t}+\frac{1}{2^k}\sum_{0\leqslant p<n/2}\binom{n}{n-p}\mathrm{e}^{-(2p-n)\mathrm{i}t}+r=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{0\leqslant k<n/2}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)+r$$

donc $q_k\in\mathrm{vect}(c_0,c_1,\ldots,c_k)\subset\mathrm{vect}(c_0,c_1,\ldots,c_p)$

Par combinaison linéaire, $\boxed{\text{la fonction } t\longmapsto p(\cos(t)) \text{ définie sur } [0,\pi] \text{ appartient à } \mathrm{F}_n}$

9) Soit p et $k \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0, \pi]$. On a $c_p(t)c_k(t) = \dfrac{\cos((p+k)t) + \cos((p-k)t)}{2}$

donc si $k \neq p$ alors $p + k > 0$

on a donc $\langle c_p, c_k \rangle_{\mathrm{G}} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos((p+k)t) + \cos((p-k)t)}{2} \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((p+k)t)}{2(p+k)} + \frac{\sin((p-k)t)}{2(p-k)} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$

et $\|c_p\|^2 = \langle c_p, c_p \rangle_{\mathrm{G}} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(2pt) + 1}{2} \mathrm{d}t$

si $p = 0$, on a $\|c_0\|^2 = \displaystyle\int_0^\pi 1 = \pi$

et si $p \neq 0$, on a $\|c_p\|^2 = \left[\dfrac{\sin(2pt)}{4p} + \dfrac{t}{2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{\text{En prenant } \alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{sinon} \end{cases}, \text{ on a } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}} \text{ et } (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est orthonormée}}$$

Soit $f \in \mathrm{G}$. On va montrer que $f \in \overline{\mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}}$, adhérence dans G muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_{\mathrm{G}}$.

On remarque que Arccos est la bijection réciproque de la restriction : $t \in [0, \pi] \mapsto \cos(t) \in [-1, 1]$

On note $g = f \circ \mathrm{Arccos}$ qui est continue sur le segment $[-1, 1]$ par composition car Arccos est continue

Le théorème théorème de Weierstrass, nous fournit une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g sur $[-1, 1]$.

Je note N_∞ la norme infinie sur $[-1, 1]$ de sorte que : $\mathrm{N}_\infty(g - g_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $f_k \ : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g_k(\cos(t)) \end{cases}$

Il existe alors $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $f_k \in \mathrm{F}_{\mathrm{N}}$ donc $f_k \in \mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car les $\alpha_n \neq 0$

Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a $|f(t) - f_k(t)| = |f(\mathrm{Arccos}(\cos t)) - f_k(\mathrm{Arccos}(\cos t))| = |g(\cos(t)) - g_k(\cos(t))|$

donc on a $|f(t) - f_k(t)| \leqslant \mathrm{N}_\infty(g - g_k)$

donc $\|f - f_k\|_{\mathrm{G}}^2 = \displaystyle\int_0^\pi (f(t) - f_k(t))^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi \mathrm{N}_\infty(g - g_k)^2 \mathrm{d}t \leqslant \pi \mathrm{N}_\infty(g - g_k)^2$

donc $\|f - f_k\|_{\mathrm{G}} \leqslant \sqrt{\pi} \mathrm{N}_\infty(g - g_k)$

donc $\|f - f_k\|_{\mathrm{G}} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par théorème d'encadrement

on a trouvé une suite de $\mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers f pour G muni de de la norme associé au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{G}}$

Ce qui donne bien la densité de $\mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans G

Ainsi $\boxed{\text{la suite orthonormée } (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est totale dans G}}$

10) On remarque que la suite des sous espaces (F_n) est croissante pour l'inclusion

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, comme F_n et F_{n+1} sont de dimensions finies, on a

$$\|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_{\mathrm{G}} = \inf_{g \in \mathrm{F}_n} \|f - g\|_{\mathrm{G}} \geqslant \inf_{g \in \mathrm{F}_{n+1}} \|f - g\|_{\mathrm{G}} = \left\|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_{n+1}}(f)\right\|_{\mathrm{G}} \geqslant 0$$

Donc la suite $(\|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_{\mathrm{G}})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe une suite (f_k) à valeurs dans $\mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers f pour la norme $\| \cdot \|_{\mathrm{G}}$ d'après la question précédente.

Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_m\|_{\mathrm{G}} \leqslant \varepsilon$

Comme $f_m \in \mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ceci nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $f_m \in \mathrm{vect}(\alpha_n c_n)_{0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}}$ donc

$$\|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_\mathrm{N}}(f)\|_\mathrm{G} \leqslant \|f - f_m\|_\mathrm{G}$$

Par décroissance et positivité, on a : $\forall n \geqslant \mathrm{N},\ 0 \leqslant \|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_\mathrm{G} \leqslant \varepsilon$

On vient de prouver

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow 0 \leqslant \|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_\mathrm{G} \leqslant \varepsilon$$

On a bien $\boxed{\|f - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_\mathrm{G} \text{ tend vers 0 lorsque } n \text{ tend vers l'infini}}$

On suppose de plus que la suite $(\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g.

Comme de plus, chaque fonction $\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)$ est continue sur $[0,\pi]$, la fonction g est continue sur $[0,\pi]$ par théorème.

Donc $g \in \mathrm{G}$ et en utilisant l'inégalité de 9 avec la notation N_∞, on a

$$\|g - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_\mathrm{G} \leqslant \mathrm{N}_\infty(g - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f))$$

donc par théorème d'encadrement : $\|g - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\|_\mathrm{G} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc la suite de G, $\big(\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f)\big)$ converge vers g pour la norme $\|\cdot\|_\mathrm{G}$

Par unicité de la limite $f = g$

$\boxed{\text{Si de plus la suite } (\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,\pi] \text{ vers une fonction } g, \text{ alors } g = f}$

11) Soit $x \in [0, \pi/2]$. Vérifions que g_x est correctement définie

— si $\dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi$, on a $0 \leqslant \pi - t < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $g_x(t)$ est correctement défini

— d'un côté $g_x(\pi/2) = \pi/2 - \pi/2 = 0$ d'un autre côté $g_x(\pi/2) = -g_x(\pi/2) = 0$

De plus, on remarque que :

$$g_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x - t - |x-t|}{2} & \text{si } \ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \ \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

Ceci prouve la continuité de g_x en tout point de $[0,\pi] \setminus \{\pi/2\}$ et la continuité à gauche et à droite en $\pi/2$.

On a bien $g_x \in \mathrm{G}$ *Il n'est pas certain que cela soit à vérifier !*

Comme $(\alpha_k c_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de F_n, on a

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x) = \sum_{k=0}^{n} \langle \alpha_k c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} \alpha_k c_k = \frac{1}{\pi}\langle c_0, g_x\rangle_\mathrm{G} c_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} c_k$$

On a $\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi} g_x(\pi - t)\cos(kt)\mathrm{d}t$

dans la deuxième intégrale on effectue le changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$: $u = \pi - t$; $t = \pi - u$; $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$

donc $\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{0} g_x(u)\cos(k(\pi - u))\mathrm{d}u$

Ainsi $\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t - (-1)^k \int_0^{\pi/2} g_x(u)\cos(ku)\mathrm{d}u$

si k est pair, $\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} = 0$

si k est impair, $\langle c_k, g_x\rangle_\mathrm{G} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t$

donc

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \left(\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \right) c_k = \frac{4}{\pi} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \left(\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t \right) c_{2k+1}$$

et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_x(t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t = \int_0^x (\pi/2 - x)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t + \int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t$

or $\displaystyle\int_0^x (\pi/2 - x)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t = (\pi/2 - x)\left[\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}\right]_{t=0}^{t=x} = (\pi/2 - x)\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$

et à l'aide d'une intégration par parties avec des fonctions $\mathcal{C}^1$:

$$\int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t = \left[(\pi/2 - t)\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}\right]_{t=x}^{t=\pi/2} + \int_x^{\pi/2} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t = 0 - (\pi/2 - x)\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} + \left[\frac{-\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}\right]_{t=x}^{t=\pi/2}$$

Ainsi en sommant :

$$\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - t)\cos((2k+1)t)\mathrm{d}t = \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} - \frac{\cos((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)^2} = \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

donc $\boxed{\displaystyle\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2} c_{2k+1}}$ coordonnées de $\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$

On a $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, \pi]$, $\displaystyle\left|\frac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2} c_{2k+1}(t)\right| \leqslant \frac{4}{\pi(2k+1)^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}$ converge par comparaison à une série (positive) de Riemann

donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2} c_{2k+1}$ converge normalement sur $[0, \pi]$

donc la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2} c_{2k+1}\right)_{m \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$

donc la suite $(\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x))_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction h

d'après la question précédente, $h = g_x$

ainsi la suite $(\mathrm{P}_{\mathrm{F}_n}(g_x))_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction g_x

On en déduit que : $\boxed{\text{pour tout } t \in [0, \pi/2] : \dfrac{\pi}{2} - \max(x, t) = g_x(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)}$

12) Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On effectue une intégration par parties :

On a $\displaystyle\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \int_x^{\pi/2} \mathrm{V}(f)(t)\mathrm{d}t = [(t - \pi/2)\mathrm{V}(f)(t)]_{t=x}^{t=\pi/2} - \int_x^{\pi/2} (t - \pi/2)f(t)\mathrm{d}t$

donc $\displaystyle\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = 0 - (x - \pi/2)\mathrm{V}(f)(x) - \int_x^{\pi/2} (t - \pi/2)f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x xf(t)\mathrm{d}t - \int_x^{\pi/2} tf(t)\mathrm{d}t$

d'où $\boxed{\displaystyle\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x, t)\right) f(t)\mathrm{d}t}$

Ainsi

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)\mathrm{d}t$$

Les fonctions notées $f_n : t \mapsto \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)$ sont continues sur $[0,\pi/2]$

On note $\mathrm{N}_\infty(f)$ la norme infinie de f sur le segment $[0,\pi]$ qui y est continue

donc on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi//2],\ |f_n(t)| \leqslant \frac{\mathrm{N}_\infty(f)}{(2n+1)^2}$$

or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{N}_\infty(f)}{(2n+1)^2}$ converge par à une comparaison à une série de Riemann (à termes positifs)

donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0,\pi/2]$; on peut donc intervertir somme et intégrale :

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t)f(t)\mathrm{d}t\right)\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

$\boxed{\text{En prenant } a_n(f) = \dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n+1)t)f(t)\mathrm{d}t}$,

on a : $\boxed{\forall x \in [0,\pi/2],\ \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos((2n+1)x)}$

D. Équations différentielles du type Sturm-Liouville

13) Soit $f \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\varphi_n \in \mathrm{E}$.
donc d'après 2), $\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), \varphi_n\rangle = \langle f, \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(\varphi_n)\rangle$ et d'après 4), $\varphi_n \in \mathrm{E}_{1/(2n+1)^2}(\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V})$

donc $\boxed{\langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f), \varphi_n\rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2}\langle f, \varphi_n\rangle.}$

14) Soit $g \in \mathrm{E}$.

$\underline{\Rightarrow :}$ On suppose que g est solution de l'équation différentielle (S).
Alors g est deux fois dérivable et $g'' = -\lambda g - h$ donc $g'' \in \mathrm{E}$
ainsi $\mathrm{V}(g'') = -\lambda \cdot \mathrm{V}(g) - \mathrm{V}(h)$ car $\mathrm{V} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
or $\mathrm{V}(g'')$ est la primitive de g'' sur s'annulant en 0
Comme $g'(0) = 0$, on a $g' = \mathrm{V}(g'')$.
donc $\mathrm{V}^*(g') = -\lambda \cdot \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) - \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h)$ car $\mathrm{V}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
or $\mathrm{V}^*(g')$ est la primitive de $-g'$ s'annulant en $\pi/2$ et $-g(\pi/2) = 0$
donc $g = \lambda \cdot \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h)$

$\underline{\Leftarrow :}$ On suppose que $g = \lambda \cdot \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h)$
donc $g = \mathrm{V}^*\big(\lambda \cdot \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}(h)\big)$
donc $g(\pi/2) = 0$
En dérivant, $g' = -\big(\lambda \cdot \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}(h)\big) = \mathrm{V}(-\lambda g - h)$

donc $g'(0) = 0$ et en dérivant $g'' = -\lambda g - h$
donc g est solution de l'équation différentielle (S)

On a bien $\boxed{g \text{ est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si } g = \lambda \cdot \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h)}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose g est solution de l'équation différentielle (S).

donc $\langle g, \varphi_n \rangle = \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(\lambda g + h), \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle \lambda g + h, \varphi_n \rangle$ d'après 13.

On a bien la formule : $\boxed{\left(1 - \dfrac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle}$

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. on a : pour $f \in \mathrm{E}$, $a_n(f) = \dfrac{4}{\pi(2n+1)^2} \langle f, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi_n \rangle$. Ainsi

$$\mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} \varphi_n(x)$$

On a $\lambda g + h \in \mathrm{E}$ donc

$$g(x) = \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(\lambda g + h)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle \lambda g + h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} \varphi_n(x)$$

Or $\dfrac{\langle \lambda g + h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} = \lambda \dfrac{\langle g, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} + \dfrac{\langle h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} = \langle g, \varphi_n \rangle$

ce qui permet de conclure à l'aide de la formule que $\boxed{g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n}$

Remarque : On a égalité au sens de la convergence simple ; vue la question suivante c'est sans doute le sens de cette question.

Cependant on peut facilement montrer que l'on a convergence normale à l'aide de la formule de 12) ; ce qui entraîne la convergence uniforme ; ce qui permet de d'établir la convergence au sens de la norme $\| \cdot \|$.

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a en utilisant Cauchy-Schwarz

$$\left| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n(x) \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi} |(2n+1)^2 - \lambda|} |\langle h, \varphi_n \rangle| \leqslant \frac{2\|h\| \|\varphi_n\|}{\sqrt{\pi} |(2n+1)^2 - \lambda|} = \alpha_n$$

On a $\|\varphi_n\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_n^2} \leqslant \sqrt{\dfrac{4}{\pi} \dfrac{\pi}{2}} \leqslant \sqrt{2}$ donc $\alpha_n \underset{n \to \infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n$ converge et

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \left| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n(x) \right| \leqslant \alpha_n$$

Ainsi la série : $\boxed{\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \text{ est normalement convergente sur } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]}$

On note alors $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$

La fonction g est continue sur $[0, \pi/2]$ car les φ_n le sont également et qu'il y a convergence normale donc $g \in \mathrm{E}$.

Pour montrer que g est solution de (S), il suffit d'établir que $g = \lambda \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h)$ en servant de la caractérisation de 14). On a :

$$\lambda \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle g, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} \varphi_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} \varphi_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle g, \varphi_n \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_m \rangle \varphi_m(t) \varphi_n(t) \right) \mathrm{d}t$

On a $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, \pi/2],\ |\langle h, \varphi_m \rangle \varphi_m(t) \varphi_n(t)| \leqslant \dfrac{4}{\pi} |\langle h, \varphi_m \rangle|$

Là encore la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{m \geqslant 0} \left(t \mapsto \frac{1}{(2m+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_m \rangle \varphi_m(t) \varphi_n(t) \right)$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/2]$, ce qui permet l'échange série/intégrale :

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\langle h, \varphi_m \rangle}{(2m+1)^2 - \lambda} \int_0^{\pi/2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2(m-n)t) + \cos(2(m+n+1)t)}{2} \mathrm{d}t$

si $m \neq n$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(2(m-n)t)}{4(m-n)} + \frac{\sin(2(m+n+1)t)}{4(m+n+1)} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = 0$

Dans ce cas $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0$

si $m = n$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi_m(t) \varphi_n(t) \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2(m+n+1)t)}{2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + 0$

ainsi $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1$

On remarque que la famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une famille orthonormée de* E

Ainsi $\langle g, \varphi_n \rangle = \dfrac{\langle h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2 - \lambda}$

Ainsi $\lambda \cdot \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g) + \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(h) = \lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\langle h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2 - \lambda} \varphi_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle h, \varphi_n \rangle}{(2n+1)^2} \varphi_n = g$

Ainsi d'après 14), $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \text{ est solution de S}}$

16) Par l'absurde supposons $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$ et qu'il existe une solution notée g

À l'aide la première formule de 14, on a $\langle h, \varphi_p \rangle = ((2p+1)^2 - \lambda) \langle g, \varphi_n \rangle = 0$

Absurde

$\boxed{\text{si } \langle h, \varphi_p \rangle \neq 0, \text{ alors (S) n'a pas de solution}}$

On suppose désormais que $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$

Il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = (2p+1)^2$

On pose $g = \displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$

On montre de la même manière qu'en 15 qu'il y a convergence normale puis que g est solution de S ce qui change un petit peu, c'est le calcul de $\langle g, \varphi_p \rangle = 0 = \langle \mathrm{V}^* \circ \mathrm{V}(g), \varphi_p \rangle = \langle h, \varphi_p \rangle$

Donc $\boxed{g = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda}\langle h, \varphi_n\rangle \varphi_n \text{ est solution de S si } \langle h, \varphi_p\rangle = 0 \text{ et } \lambda = (2p+1)^2 \text{ où } p \in \mathbb{N}}$

On considère l'équation homogène associée à (S) :

$$(\mathrm{SH}) \left\{ \begin{array}{l} y'' + (2p+1)^2 y = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Il est claire que φ_p est solution de (SH) donc que la droite vectorielle $\mathrm{vect}(\varphi_p)$ est inclus dans l'ensemble des solutions de (SH)

Donc pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$, la fonction de E : $g + \mu\varphi_p$ est une solution de (S)

$\boxed{\text{si } \langle h, \varphi_p\rangle = 0 \text{ et } \lambda = (2p+1)^2 \text{ alors (S) admet une infinité de solutions}}$ car $\varphi_p \neq 0_{\mathrm{E}}$

FIN DU PROBLÈME