DS2 de MP
01.10.22

Devoir surveillé

Durée : 4h

Groupe symplectique

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- La transposée d'une matrice A sera notée A^T.
- Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par
$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n,\ (U|V) = U^T V$$
- On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.

I Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note

$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ M^T J M = J\}$$

1 Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.

2 Vérifier que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$$

3 Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

4 Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

5 Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

6 Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

7 Montrer que si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ alors $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8 Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

II Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ MN = NM\}$$

9 Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

10 En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.

11 Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.

12 Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

III Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13 Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

14 En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1$$

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

15 Montrer que le produit scalaire $(QV_1|QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

16 Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leqslant n$. Soit $s_1, \ldots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \ldots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m$$

17 Montrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.

18 En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19 Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.

Stabilité de certaines parties de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Introduction

Soit n un entier naturel non-nul. On note $\mathcal{M} = M_{n,n}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n^2 des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices colonne à coefficients dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices ligne. Enfin, on note $\mathcal{R}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des matrices de rang 1.
Si P et Q sont deux éléments du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_{P,Q}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ défini, pour $A \in \mathcal{M}$, par

$$\varphi_{P,Q}(A) = PAQ.$$

On note T l'endomorphisme transposition de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ défini par $T(A) = {}^tA$ pour $A \in \mathcal{M}$. On note alors

$$G = \{\varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbb{C})\},$$

$$G' = \{T \circ \varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbb{C})\},$$

et

$$\mathcal{G} = G \cup G'.$$

Première partie

On va montrer dans cette partie que les endomorphismes f de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tels que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, sont précisément les éléments de $\mathcal{G}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{G}$, et si $A \in \mathcal{R}_1$, alors $f(A) \in \mathcal{R}_1$.
2. Montrer que toute matrice de rang 1 est produit d'un élément de $\mathcal{C}$ par un élément de $\mathcal{L}$.
3. Soient $X, X' \in \mathcal{C}$ et $V, V' \in \mathcal{L}$. On suppose que $XV + X'V'$ est de rang $\leqslant 1$, et que V et V' sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}$.
   (a) Montrer qu'il existe $Y, Y' \in \mathcal{C}$, tels que $VY = 1$, $V'Y = 0$, $VY' = 0$ et $V'Y' = 1$.
   (b) En déduire que X et X' sont liés dans $\mathcal{C}$.
4. Soient F, F_1, F_2 trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que $F \subset F_1 \cup F_2$. Montrer que $F \subset F_1$ ou $F \subset F_2$.
5. Si $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, on note $X\mathcal{L} = \{XV; V \in \mathcal{L}\}$. De même, on note $\mathcal{C}V = \{XV; X \in \mathcal{C}\}$ pour $V \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il s'agit là de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$, de dimension n et constitués de matrices de rang inférieur ou égal à 1.
   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1. Montrer que F est soit de la forme $X\mathcal{L}$ pour $X \neq 0$, soit de la forme $\mathcal{C}V$ pour $V \neq 0$.
   (c) Calculer, pour $X, X' \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ et $V, V' \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, les intersections $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$, $\mathcal{C}V \cap \mathcal{C}V'$ et $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

   On se donne, jusqu'à la fin de cette partie, un endomorphisme f sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tel que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.
6. Montrer que l'image par f d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1, est du même type.
7. On suppose qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $f(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $f(X_1V) = Y_1VQ$ pour tout $V \in \mathcal{L}$.
   [Indication : définir Q sur une base de $\mathcal{L}$.]
   (b) Montrer que $f(X_1\mathcal{L}) \neq f(X_2\mathcal{L})$. [Indication : raisonner par l'absurde.]
   (c) Montrer que pour tout $V \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, $f(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec $U \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$.
   (d) Que dire de $f(X\mathcal{L})$ pour $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$?
   (e) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, il existe $Y \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, telle que pour tout $V \in \mathcal{L}$, on ait

   $$f(XV) = YVQ$$

   pour la matrice Q obtenue en 7-a).

(f) Montrer que $f \in G$.

8. Conclure.

Deuxième partie

On va montrer qu'un endomorphisme d'espace vectoriel f de $\mathcal{M}$ vérifie $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$ si, et seulement si, il est dans $\mathcal{G}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{G}$, et si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}$, de rang $r \leqslant n-1$.
   (a) Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $M - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
   [Indication : on commencera par traiter le cas où A est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.]
   (b) Montrer qu'il existe $N \in GL_n(\mathbb{C})$, telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ.
3. Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}$, tel que $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que si A n'est pas inversible, alors $f(A)$ non plus.
   (b) Montrer que pour $A \in \mathcal{M}$, on a
   $$\operatorname{rang} f(A) \geqslant \operatorname{rang} A.$$
   (c) En déduire que f préserve le rang.
   (d) Conclure.