Corrigé du DS2

Groupe symplectique

I Le groupe symplectique

1 Un calcul par blocs donne $J^2 = -I_{2n}$ et

$$J^T = \begin{pmatrix} 0_n^T & I_n^T \\ -I_n^T & 0_n^T \end{pmatrix} = -J$$

Comme $-J^2 = I_{2n}$, J est inversible d'inverse $-J$, soit encore J^T.

2 $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, car $J^T J J = J$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} K(\alpha)^T J K(\alpha) &= \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

Ainsi, $K(\alpha) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

3 Soit $U \in \mathcal{G}_n$. On rappelle que $(U^{-1})^T = (U^T)^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} L_U^T J L_U &= \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_n & -U^T \\ U^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_n & -U^T (U^{-1})^T \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

Ainsi, $L_U \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

4 Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, alors $M^T J M = J$, et donc $\det(J) = \det(M^T)\det(J)\det(M) = \det(M)^2 \det(J)$, puis $\det(M)^2 = 1$ car J est inversible. Par conséquent, $\det(M) = \pm 1$.

5 Soit $M, N \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a

$$(MN)^T JMN = N^T \underbrace{M^T J M}_{= J} N = N^T J N = J,$$

donc $MN \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

6 Soit $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a vu que $\det(M) = \pm 1$. En particulier, M est inversible. En multipliant la relation $M^T J M = J$ à droite par M^{-1} et à gauche par $(M^{-1})^T$, on obtient

$$J = (M^{-1})^T J M^{-1}$$

et donc $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

7 Soit $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a $M^T = J M^{-1} J^{-1}$, or $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est stable par produit et par passage à l'inverse, donc $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

8 À la suite d'un calcul par blocs, on constate que M appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ si et seulement si

$$C^T A = A^T C, \quad C^T B - A^T D = -I_n, \quad D^T A - B^T C = I_n \quad \text{et} \quad D^T B = B^T D$$

II Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

9 Il est clair que I_{2n} et $-I_{2n}$ commutent avec tout élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ (et même de $\mathcal{M}_{2n}$). De plus, ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$, d'où le résultat.

10 Tout d'abord, L et sa transposée $K(-1)$ sont bien des éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ (voir les questions **2** et **7**).
La relation $ML = LM$ donne $C = 0_n$ et $A = D$. La relation $L^T M = ML^T$ ajoute $B = 0_n$. Comme M est inversible et que $\det(M) = \det(A)\det(D)$, A est aussi inversible.

11 Nous savons que L_U appartient bien à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$: le fait que L_U et M (diagonale par blocs) commutent donne $AU = UA$, donc A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.

12 A commute avec I_n et avec toutes les matrices $I_n + E_{i,j}$, où $(E_{i,j},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ (elles sont inversibles car triangulaires à termes diagonaux tous non nuls), donc A commute avec tous les $E_{i,j}$.
Or $AE_{i,j}$ (resp. $E_{i,j}A$) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j-ème qui est la i-ème de A (resp. la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la i-ème, qui est la j-ème de A : en particulier, $a_{i,i} = a_{j,j}$, et les autres coefficients de la i-ème colonne de A sont nuls.
A est donc scalaire : $A = \lambda I_n$ pour un certain réel λ. Or $\det(M) = \pm 1$, et $\det(M) = \det(A)^2 = \lambda^{2n}$, donc $\lambda = \pm 1$: $A = \pm I_n$ et $M = \pm I_{2n}$.

III Déterminant d'une matrice symplectique

13 Il s'agit de trouver quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$U + QV = A, \quad QW = B, \quad V = C \quad \text{et} \quad W = D$$

On choisit donc successivement $V \stackrel{def}{=} C$, $W \stackrel{def}{=} D$, $Q \stackrel{def}{=} BD^{-1}$ (D est supposée inversible) et $U \stackrel{def}{=} A - BD^{-1}C$, et on vérifie aisément que, réciproquement, ce choix convient.

14 En question **8**, on a obtenu notamment $D^T B = B^T D$, donc, en multipliant à gauche par $(D^T)^{-1}$ et à droite par D^{-1}

$$BD^{-1} = (D^T)^{-1}B^T = (D^{-1})^T B^T = (BD^{-1})^T,$$

donc BD^{-1} est symétrique.
La question précédente permet d'affirmer que

$$\det(M) = \det(U)\det(W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

Comme le déterminant est invariant par transposition, et comme BD^{-1} est symétrique,

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T BD^{-1}),$$

et donc

$$\det(M) = \det((A^T - C^T BD^{-1})D) = \det(A^T D - C^T B)$$

La question **8** indique que $A^T D - C^T B = I_n$, et finalement $\det(M) = 1$.

15 On a $QV_1 = s_1 PV_1$ et $QV_2 = s_2 PV_2$, donc

$$(QV_1|QV_2) = s_1(PV_1|QV_2) = s_1 V_1^T P^T QV_2 \quad (1),$$

et

$$(QV_1|QV_2) = s_2(QV_1|PV_2) = s_2 V_1^T Q^T PV_2 = s_2 V_1^T P^T QV_2 \quad (2),$$

car $P^T Q$ est symétrique. Ainsi, en formant $s_2(1) - s_1(2)$, $(s_2 - s_1)(QV_1|QV_2) = 0$ puis $(QV_1|QV_2) = 0$.

16 Si $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Ker}(D) \neq \{0\}$, alors, en prenant X non nul dans cette intersection, $Y \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0_n \\ X \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(M)$ (*i.e.* $MY = 0$) : cela contredit l'inversibilité de M.

17 Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Si $DV_i = 0$, alors $s_i BV_i = 0$, puis $BV_i = 0$ car $s_i \neq 0$. V_i est alors un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(D) \cap \mathrm{Ker}(B)$, ce qui contredit la question précédente.
La famille $(DV_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ est une famille orthogonale de vecteurs *tous non nuls* de $\mathcal{E}_n$, et forme donc un système libre de $\mathcal{E}_n$.

18 Comme $\mathcal{E}_n$ est de dimension n, il existe au plus n valeurs réelles non nulles distinctes de α telles que $D_\alpha B$ ne soit pas inversible : il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19 On choisit α tel que $D - \alpha B$ soit inversible. En formant $K(\alpha)M$, on obtient un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ auquel on peut appliquer la question 14 : $\det(K(\alpha)M) = 1$, puis, comme $\det(K(\alpha)) = 1$, on obtient bien $\det(M) = 1$.

Stabilité de certaines parties de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Première partie

On rappelle pour la suite les résultats élémentaires suivants :

— Si M et N sont deux matrices rectangulaires de formats compatibles, le rang de MN est inférieur ou égal aux rangs de M et de N.

— Le rang d'une matrice ne change pas si on la multiplie (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.

— Le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de la matrice.

1. D'après les remarques préliminaires, si P et Q appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{rg} PAQ = \operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg}^t Q^t A^t P = \operatorname{rg} A$, donc $(f \in G \cup G'$ et $\operatorname{rg} A = 1) \ \Rightarrow \operatorname{rg} f(A) = 1$.
2. Si u est un endomorphisme de rang 1, de matrice A dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$, son image est une droite, dirigée par un certain vecteur e non nul. En appelant X le vecteur colonne représentant e dans B, en posant $u(e_j) = b_j e$ et V le vecteur ligne $(b_1, \dots b_n)$, on en déduit que $A = CV$.
3. (a) On complète ${}^tV$ et ${}^tV'$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{C}$, puis on considère les formes linéaires φ et ψ nulles en chaque e_j, sauf $\varphi(e_1) = 1$ et $\psi(e_2) = 1$. On a donc (en représentant matriciellement φ et ψ dans la base canonique) des vecteurs Z et Z' de $\mathcal{L}$ tels que $Z^tV = 1$, $Z^tV' = 0$, $Z'({}^tV) = 0$ et $Z'({}^tV') = 1$. En posant $Y =^t Z$ et $Y' =^t Z'$, on a bien le résultat voulu.
   (b) $(XV + X'V')Y = X$ et $(XV + X'V')Y' = X'$ donc X et X' appartiennent à l'image de $XV + X'V'$ qui est de rang 1, donc X et X' sont liés.
4. Si F n'est inclus ni dans F_1 ni dans F_2, il existe un vecteur x_1 appartenant à $F \setminus F_1$, donc à $F_2 \setminus F_1$ et un vecteur x_2 appartenant à $F \setminus F_2$, donc à $F_1 \setminus F_2$. Mais alors $x_1 + x_2 \in F$, donc par exemple $x_1 + x_2 \in F_1$, or $x_2 \in F_1$, donc $x_1 \in F_1$: contradiction (idem si $x_1 + x_2 \in F_2$).
5. (a) XV est de rang $\leqslant 1$ car l'image de l'endomorphisme associé est incluse dans la droite $\mathbb{C}X$. L'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathcal{M} \\ V & \mapsto & XV \end{array}$ est linéaire, injective, d'image $X\mathcal{L}$, lequel est donc un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension n. Idem concernant $\mathcal{C}V$.
   (b) On considère une base de F de la forme $(X_iV_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit $I = \{i \in [1, n]/ \ (V_1, V_i) \text{ libre } \}$. Si $i \in I$, $X_1V_1 + X_iV_i \in F$, donc d'après 3, X_1 et X_i sont liés, et si $i \notin I$, V_1 et V_i sont liés. Par conséquent, la famille $(X_iV_1)_{i \notin I} \cup (X_1V_i)_{i \in I}$ est une base de F, i.e $F \subset X_1\mathcal{L} \cup \mathcal{C}V_1$. D'après 4, F est inclus dans l'un des deux et étant tous deux de dimension n d'après 5a, ils sont égaux.
   (c) Si X et X' sont liés, $X\mathcal{L} = X'\mathcal{L} = X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.
   Sinon, soit $A \in X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L} \ : \ A = XY = X'Y'$, d'où $XY - X'Y' = 0$ donc par 3, Y et Y' sont colinéaires donc $\exists a \in \mathbb{C}$, $Y' = aY$, d'où $(X - aX')Y = 0$, or (X, X') libre, donc $Y = 0$, d'où $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L} = \{0\}$.
   De même, si V et V' sont liés, $\mathcal{C}V = \mathcal{C}V'$, sinon $\mathcal{C}V \cap \mathcal{C}V' = \{0\}$.
   Soit $A \in X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$, $A \neq 0$: $A = XY = UV$, avec Y et U non nulles. $A \in X\mathcal{L} \cap U\mathcal{L}$, donc par ce qui précède, $\exists a \neq 0$, $U = aX$, i.e $X(Y - aV) = 0$, i.e $Y = aV$, d'où $A \in \mathbb{C}XV$. La réciproque étant évidente, $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V = \mathbb{C}XV$.
6. Soit F un tel sous-espace. D'après 5b, on peut supposer que $F = X\mathcal{L}$, avec $X \neq 0$ (la méthode sera analogue si $F = \mathcal{C}V$). Soit $(XL_1, \dots XL_n)$ une base de F. $f(F)$ est un s.e.v de $\mathcal{M}$ de dimension $\leqslant n$ formé de matrices de rang $\leqslant 1$, donc est inclus dans un $Y\mathcal{L}$ ou un $\mathcal{C}V$ (en adaptant la preuve de 5b). Plaçons-nous dans le premier cas et posons $f(XL_i) = YL'_i$. Si la famille $(YL'_1, \dots YL'_n)$ est liée, il existe n scalaires non tous nuls (a_k) tels que $\sum a_k YL'_k = 0$, soit $f(X \sum a_k L_k) = 0$. Si $X \sum a_k L_k$ était de rang 1, son image aussi, ce qui n'est pas le cas, donc cette matrice est nulle, ce qui contredit que $(XL_1, \dots XL_n)$ est une base de F, donc $(YL'_1, \dots YL'_n)$ est une base de $f(F)$, i.e $f(F) = Y\mathcal{L}$. On procède de même si $f(F) \subset \mathcal{C}V$.
7. (a) Soit $(L_1, \dots L_n)$ la base canonique de $\mathcal{L}$, et $Y_1L'_j = f(X_1L_j)$. Supposons $\sum a_k L'_k = 0$. Alors $f(X_1 \sum a_k L_k) = 0$, or $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ et $X_1 \sum a_k L_k$ est de rang $\leqslant 1$, donc elle est nulle, d'où $\sum a_k L_k = 0$, et tous les a_k sont nuls. Finalement, $(L'_1, \dots, L'_n)$ est une base de $\mathcal{L}$. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [1, n]$, ${}^tL'_k =^t Q^t L_k$, i.e $L'_k = L_k Q$, d'où par linéarité, $f(X_1V) = Y_1VQ$ pour tout $V \in \mathcal{L}$.

(b) Si $f(X_1\mathcal{L}) = f(X_2\mathcal{L})$ alors $Y_1\mathcal{L} = Y_2\mathcal{L}$, et d'après 5c, Y_1 et Y_2 sont colinéaires, donc $\exists a \neq 0,\ Y_2 = aY_1$. On a donc $f(X_1\mathcal{L}) = f(X_2\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$.
Pour tous scalaires λ et μ, on a
$$f\left((\lambda X_1 + \mu X_2)\,\mathcal{L}\right) \subset Y_1\mathcal{L}$$
avec égalité dès que $\lambda X_1 + \mu X_2 \neq 0$.
D'après 7a, il existe Q et Q' dans $GL_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall V \in \mathcal{L},\ f(X_1V) = Y_1VQ$ et $f(X_2V) = Y_1VQ'$, et donc
$$f\left(((\lambda X_1 + \mu X_2)\,V\right) = Y_1V(\lambda Q + \mu Q')$$
Or il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $Q'Q^{-1} - \gamma I_n$ ne soit pas inversible, on peut donc trouver $V \in \mathcal{L}$ non nulle telle que $V\,(Q' - \gamma Q) = 0$, et donc telle que
$$f\left((-\gamma X_1 + X_2)\,V\right) = 0$$
ce qui contredit le fait que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

(c) D'après 6, $f(\mathcal{C}V)$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}U$. Supposons $f(\mathcal{C}V) = Y\mathcal{L}$.
$\mathcal{C}V \cap X_1\mathcal{L} = \mathbb{C}X_1V$, donc $\mathbb{C}f(X_1V) = f(\mathcal{C}V \cap X_1\mathcal{L}) \subset f(\mathcal{C}V) \cap f(X_1\mathcal{L}) = Y\mathcal{L} \cap Y_1\mathcal{L}$. D'après 5c, cela impose que Y_1 et Y sont colinéaires. Par le même raisonnement, on montre que Y_2 et Y sont colinéaires, donc $Y_1\mathcal{L} = Y_2\mathcal{L}$, soit $f(X_1\mathcal{L}) = f(X_2\mathcal{L})$, en contradiction avec la question 7b.

(d) $f(X\mathcal{L})$ est du type $Y\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}U$. Supposons $f(X\mathcal{L}) = \mathcal{C}U$.
Soit V un vecteur ligne non colinéaire à U. $f(\mathbb{C}XV) = f(X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V) \subset f(X\mathcal{L}) \cap f(\mathcal{C}V) = \mathcal{C}U \cap \mathcal{C}V = \{0\}$. Ceci est impossible car les éléments non nuls de $\mathbb{C}XV$ sont de rang 1 donc ceux de $f(\mathbb{C}XV)$ également.

(e) Soit $X \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, non colinéaire à X_1 (le cas contraire étant évident). D'après d, il existe $Z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $f(X\mathcal{L}) = Z\mathcal{L}$, et d'après a, il existe $Q' \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall V \in \mathcal{L},\ f(XV) = ZVQ'$. D'après b, Y_1 et Z ne sont pas colinéaires.
Or pour tous λ et μ,
$$\operatorname{rg} f\left((\lambda X_1 + \mu X)\,V\right) \leqslant 1$$
avec $f\left((\lambda X_1 + \mu X)\,V\right) = X_1(\lambda VQ) + Z(\mu VQ')$. Ainsi, grâce à 3.b, λVQ et $\mu VQ'$ sont liés, et donc pour tout V, $VQ'Q^{-1}$ est colinéaire à V. Cela entraîne classiquement (en transposant) que $Q'Q^{-1}$ est une matrice scalaire, et donc que $Q' = \lambda Q$ pour un certain λ non nul, d'où le résultat.
Par conséquent, $f(XV) = \frac{Z}{\lambda}VQ = YVQ$ en posant $Y = \frac{Z}{\lambda}$.

(f) Soit $(E_1, \dots E_n)$ la base canonique de $\mathcal{C}$. Pour chaque indice i, il existe $Y_i \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ tel que $\forall V \in \mathcal{L},\ f(E_iV) = Y_iVQ$. Soit P l'élément de $\mathcal{M}$ tel que pour tout i, $PE_i = Y_i$. Ainsi, $\forall V,\ f(E_iV) = PE_iVQ$. Par linéarité on en déduit que $\forall X \in \mathcal{C}, \forall V \in \mathcal{L},\ f(XV) = PXVQ$. Si P n'est pas inversible, il existe X non nul tel que $PX = 0$ d'où $f(XV) = 0$, ce qui est impossible car $\operatorname{rg} XV = 1$.
Puisque $\operatorname{Vect}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{M}$, et que les applications linéaires f et $A \mapsto PAQ$ coïncident sur une famille génératrice de $\mathcal{M}$, $f = \varphi_{P,Q} \in G$.

8. Supposons maintenant qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1\mathcal{L}) = \mathcal{C}V_1$ et $f(X_2\mathcal{L}) = \mathcal{C}V_2$. Alors $(T \circ f)(X_1\mathcal{L}) = {}^tV_1\mathcal{L}$ et $(T \circ f)(X_2\mathcal{L}) = {}^tV_2\mathcal{L}$. On en déduit par 7 que $T \circ f \in G$, soit $f \in G'$.
Si $f(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $f(X_2\mathcal{L}) = \mathcal{C}V_2$ avec X_1 et X_2 indépendants, on utilise $X_1 + X_2$ (indépendant de X_1 et de X_2) pour se ramener à l'un des deux cas précédents.
Si $n = 1$, la question est sans intérêt.

Deuxième partie

1. Le produit de 2 matrices inversibles est inversible et la transposée d'une matrice inversible est inversible, donc $f \in \mathcal{G}$ et $A \in GL_n(\mathbb{C}) \implies f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2. (a) — Soit $A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $I_n - \lambda A_r$ est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 donc est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
— Si A est de rang $r \leqslant n-1$, alors A et A_r ont même rang donc il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PA_rQ$, d'où $PQ - \lambda A = P(I_n - \lambda A_r)Q \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) — Soit $B_r \in \mathcal{M}$ diagonale à coefficients diagonaux $1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{r}, 0, \dots 0$. $I_n - \lambda B_r$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots r\}$

— Si A est de rang $r \leqslant n-1$, il existe comme plus haut P et Q dans $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PB_rQ$, donc $PQ - \lambda A = P(I - \lambda B_r)Q$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, \dots r\}$.

3. (a) A est de rang $r \leqslant n-1$. D'après 2a, $\exists M \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{C},\ M - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $f(M) - \lambda f(A) \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $f(A)$ est inversible, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, f(A)^{-1}f(M) - \lambda I_n$ est inversible, ce qui est faux en prenant pour λ une valeur propre complexe de $f(A)^{-1}f(M)$.

(b) — Si $\mathrm{rg}\, A = n$, alors $\mathrm{rg}\, f(A) = n$ par hypothèse.

— Sinon, on pose $r = \mathrm{rg}\, A$ et on applique 2b. Il existe N inversible telle que $N - \lambda A$ est inversible sauf pour exactement r valeurs de λ, nécessairement non nulles. Or M inversible équivaut à $f(M)$ inversible, d'où $f(N) - \lambda f(A)$ est non inversible pour r valeurs de λ, or $f(N)$ est inversible, donc en mettant $\lambda f(N)$ en facteur, $\lambda^{-1}I_n - f(N)^{-1}f(A)$ vérifie la même propriété.

Posons $M = f(N)^{-1}f(A)$. Nous disposons de r scalaires non nuls distincts $\mu_1, \dots, \mu_r$ tels que $\mathrm{Ker}(M - \mu_i I_n) \neq \{0\}$ pour tout i : en prenant des vecteurs non nuls $X_1, \dots, X_r$ de sous-espaces propres respectifs, on dispose d'une famille libre de vecteurs dans $\mathrm{Im}(M)$ (puisque $MX_i = \mu_i X_i$ avec $\mu_i \neq 0$) : $\mathrm{rg}(M) \geqslant r$, puis, $f(N)$ étant inversible, $\mathrm{rg}(f(A)) \geqslant r$.

(c) $f(A) = 0 \Rightarrow A = 0$ d'après 3b, ce qui prouve l'injectivité de f, donc sa bijectivité. $f(GL_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ d'après 3a, donc f^{-1} vérifie la même propriété que f. En lui appliquant 3b, il vient $\forall B,\ \mathrm{rg}\, f^{-1}(B) \geqslant \mathrm{rg}\, B$, en l'appliquant à $B = f(A)$, on conclut que f préserve le rang.

(d) Si $f(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$, alors f préserve le rang, donc $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, donc $f \in \mathcal{G}$ par la partie 1. La question 1 assure l'équivalence cherchée.