Corrigé du DS1

Problème A – Suites complètement monotones et transformée d'Euler

Partie I – Suites complètement monotones

I.1

a Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on formule l'hypothèse $\mathcal{H}_p$: « *Pour toute fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x dans l'intervalle $]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$. »

Preuve de $\mathcal{H}_1$: Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(\Delta^1 u)_n = u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$. La fonction f est à valeurs réelles, continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$: par application de l'égalité des accroissements finis, il existe x dans l'ouvert $]n, n+1[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)$$

Hérédité : fixons $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{H}_p$ vérifiée, déduisons-en $\mathcal{H}_{p+1}$: soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. On introduit la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

On observe que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p \circ \Delta u)_n = (\Delta^p(\Delta u))_n = (\Delta^p v)_n$$

où v est la suite de terme général $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Par application de $\mathcal{H}_p$, pour la fonction g, il existe $x \in]n, n+p[$, tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x)$$

Par application de l'égalité des accroissements finis, à $f^{(p)}$ entre x et $x+1$, il existe $y \in]x, x+1[\subset]n, n+p+1[$, tel que

$$(\Delta^{p+1} u)_n = f^{(p+1)}(y)$$

ce qui prouve l'hérédité.

Remarque – Il était essentiel de formuler $\mathcal{H}_p$ pour toute fonction f (vérifiant les bonnes hypothèses), puisqu'on applique $\mathcal{H}_p$ non pas à f mais à g.

Remarque – On ne pouvait pas initialiser la récurrence au rang $n = 0$, car on demande x dans l'ouver $]n, n+p[$: si on avait demandé l'existence de x dans le segment $[n, n+p]$, nous aurions pu initialiser au rang $n = 0$.

b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = f(n)$, où $f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction f est indéfiniment dérivable, et on prouve par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p \, p!}{(1+x)^{p+1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$. Par application du résultat de la question précédente (f en vérifie bien les hypothèses), il existe $x \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p \, p!}{(1+x)^{p+1}}$$

si bien que

$$(-1)^p (\Delta^p u)_n = \frac{p!}{(1+x)^{p+1}} > 0$$

La suite (a_n) est donc bien complètement monotone.

I.2

a Notons S l'endomorphisme de E, qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\Delta = S - \mathrm{Id}_E$. De plus, S et $-\mathrm{Id}_E$ commutent clairement, et l'on peut donc écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S^k (-\mathrm{Id}_E)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} S^k$$

Le résultat demandé s'ensuit alors, en remarquant que $(S^k u)_n = u_{n+k}$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

b La formule obtenue à la question précédente nous donne, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$(\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b^{n+k} = b^n (b-1)^p$$

de sorte que

$$(-1)^p (\Delta^p b)_n = b^n (1-b)^p > 0$$

puisque $b \in]0, 1[$.

La suite (b^n) est bien complètement monotone.

I.3

a Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \omega(t)\mathrm{d}t$$

car pour tout $t \in [0, 1]$, $-t \neq 1$.

La fonction ω est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle y est bornée : soit M un majorant de $|\omega|$. On a

$$\left| \int_0^1 \frac{-(-t)^{n+1}}{1+t} \omega(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{-(-t)^{n+1}}{1+t} \omega(t) \right| \mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{M}{n+2}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \omega(t)\mathrm{d}t$$

tend vers $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers l'infini.

Ceci établit à la fois la convergence de la série de terme général $(-1)^k u_k$, et le fait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t$$

Remarque – On pouvait montrer la convergence de la série par application du CSSA, mais cela ne donnait pas la somme de la série.

Remarque – Les 5/2 pouvaient établir le résultat (convergence et somme) par application du TCVD aux sommes partielles, mais pas par le TITT.

b Par un calcul similaire à celui effectué en I.2.b, on a, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$(-1)^p (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{-k} \binom{p}{k} \int_0^1 t^{n+k} \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t)$$

La fonction $t \mapsto t^n (1-t)^p \omega(t)$ est positive, continue, et non identiquement nulle sur $[0, 1]$ (car sinon, ω le serait sur $]0, 1[$, puis, par continuité, le serait sur $[0, 1]$, ce qui est exclu) : son intégrale est strictement positive.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

c On mène des calculs tout à fait similaires à ceux effectués en I.3.a.

Remarque – Les 5/2 avaient l'embarras du choix : ils pouvaient notamment utiliser le TITT, ou le théorème d'intégration des séries de fonctions sous hypothèse de convergence uniforme (ici, il y a convergence normale).

d Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme, et la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2} \right)^p \omega(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-t)^k \omega(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_k = (-1)^p (\Delta^p u)_0$$

d'après I.2.a (pour $n = 0$).

Les questions I.3.a et I.3.c permettent alors de conclure immédiatement :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$$

I.4 On prend pour ω la fonction constante de valeur 1 sur $[0,1]$, qui est bien continue, positive, et non identiquement nulle : en appliquant les résultats précédents, et sachant que $u_n = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, que $\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \frac{1}{2^p}\left[\frac{-(1-t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$, et que $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(2)$, on a bien :

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

I.5

a Ces calculs ont déjà été menés en I.3.d

b D'après les questions précédentes $S - \mathcal{E}_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p+1} \omega(t)\mathrm{d}t$.

Soit $N \geqslant n+1$ un entier :

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{N} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p+1} \omega(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+2} \left(\frac{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N-n}}{1-\left(\frac{1-t}{2}\right)}\right)\omega(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 (1-t)^{n+2}\frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{S}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{p\geqslant n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{p+1} \omega(t)\mathrm{d}t$ est à termes positifs, et la suite de ses sommes partielles est majorée par $\frac{S}{2^{n+1}}$: cette série converge donc, vers la borne supérieure de la suite de ses sommes partielles, ce qui permet d'écrire

$$0 \leqslant S - \mathcal{E}_n \leqslant \frac{S}{2^{n+1}}$$

et donc *a fortiori*

$$|S - \mathcal{E}_n| \leqslant \frac{S}{2^{n+1}}$$

Partie II – Transformée d'Euler

II.1

a On a vu en I.2.a que $(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}u_{n+k}$.

Comme la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $(u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Comme combinaison linéaire de telles suites, la suite $((\Delta^p u)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*i.e.* la suite $(\Delta^p u)$) converge également vers 0.

b Posons $r_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r_k$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit N un entier tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $|r_n| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant N$. On a, en posant $S_N(n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|r_k|$,

$$|r_n^*| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r_k\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|r_k|\right) \leqslant S_N(n) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon$$

D'une part, $0 \leqslant \sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon = 2^n\varepsilon$.

D'autre part, $S_N(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: en effet, N étant fixé, $S_N(n)$ est de la forme $\frac{Q(n)}{2^n}$, où Q est un polynôme. En particulier, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N'$, on ait : $(0 \leqslant)S_N(n) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|r_n^*| \leqslant 2\varepsilon$, donc la suite (r_n^*) converge vers 0.

II.2

a Soit $K \in \mathbb{N}$. Par télescopage,

$$\sum_{p=0}^{K}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\right) = \frac{(-1)^0}{2^0}(\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{K+1}}{2^{K+1}}(\Delta^{K+1}u)_n$$

D'après la question précédente, le membre de droite tend vers u_n lorsque K tend vers l'infini, ce qui établit la convergence de la série étudiée, ainsi que la formule

$$u_n = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\right)$$

b Par simplification par le facteur non nul $\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}$ dans la formule demandée, il s'agit de montrer que (la série engagée converge, et que)

$$(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n\right)$$

Pour clarifier les calculs, notons $v_n = (\Delta^p u)_n$. On a $(\Delta^{p+1}u)_n = (\Delta \circ \Delta^p u)_n = (\Delta v)_n = v_{n+1} - v_n$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(2v_n + (v_{n+1} - v_n)\right) &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(v_{n+1} + v_n)\\
&= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n v_{n+1} + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n v_n\\
&= \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^{n-1} v_n + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n v_n\\
&= (-1)^N v_{N+1} + v_0
\end{aligned}$$

Or la question II.1.a assure que (v_{N+1}) tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, d'où la convergence de la série évoquée, et la formule souhaitée :

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\right)$$

II.3

a On pose $E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$. D'après la question précédente, et par linéarité de la somme pour des séries convergentes,

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(u_k + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k\right)
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum(-1)^k u_k$ converge (et on note S sa somme), donc la série $\sum\limits_k (-1)^k \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k$ converge également, et

$$\begin{aligned}
E_n - S &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\Delta^{n+1} u)_k \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{p=0}^{n+1} (-1)^{n+1-p} \binom{n+1}{p} u_{k+p} \right) \\
&= \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+p} u_{k+p} \right) \\
&= \frac{-1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^{k} u_{k} \right)
\end{aligned}$$

b Comme la série $\sum (-1)^n u_n$ converge, la suite $\left(\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k u_k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ (est bien définie et) converge vers 0 : en lui appliquant II.1.b, et compte tenu de la question précédente, la suite $(E_n - S)$ converge vers 0, *i.e.* (E_n) converge vers S. Ceci établit bien la formule souhaitée.

Problème B – Sommes de parties d'un groupe additif

1

a Quand on considère une partie de $[\![1, n+1]\!]$ de cardinal $p+1$, son maximum est compris entre $p+1$ et $n+1$. Ce maximum k étant fixé, pour se donner une telle partie, il reste à choisir p élément dans $[\![1, k-1]\!]$. On obtient donc

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k+1}{p}$$

Par changement d'indice, on obtient bien

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

b L'ensemble de ces t-uplets est équipotent à l'ensemble des $N+t-1$-uplets de N symboles « 1 » et de $t-1$ symboles « + », d'où le résultat.

c On peut le vérifier par récurrence sur N, le résultat étant évident pour $N = 1$, et l'hérédité se déduisant de la formule

$$\binom{(N+1)+t-1}{N+1} = \frac{N+t}{N+1} \binom{N+t-1}{N}$$

et de l'encadrement

$$\frac{t}{N+1} \frac{N+t}{N+1} \leqslant t$$

2

a Bien sûr, $A + B \subset G$ (car G est stable par $+$, c'est d'ailleurs ce qui a permis de donner un sens à $A + B$.)

Réciproquement, soit $g \in G$. Les parties $g - A$ et B de G, de cardinaux respectifs A et B, ne sont pas disjointes, car $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $g - a = b$, soit $g = a + b$, donc $g \in A + B$.

Ceci valant pour tout élément g de G, on a bien montré $G \subset A + B$, d'où l'égalité.

b Il suffit de donner un exemple où G admet un sous-groupe H de cardinal $\mathrm{Card}(H)/2$, puis de prendre $A = B = H$. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (qui n'est autre que $\mathbb{U}_2$ en notation additive) convient.

3

a Soit $(a, b) \in A \times B$. $A + B$ contient $a + B$, cette dernière partie étant de cardinal B, donc $A + B$ est de cardinal au moins celui de B. De même, $\mathrm{Card}(A + B) \geqslant \mathrm{Card}(A)$ en considérant $b + A$.

On a bien : $\max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B)) \leqslant \mathrm{Card}(A + B)$.

L'application

$$\alpha : \begin{array}{rcl} A \times B & \to & A + B \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

étant surjective (par définition de $A+B$), on a $\mathrm{Card}(A+B) \leqslant \mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B)$.

b La question précédente (plus précisément l'inégalité de gauche) donne immédiatement la croissance de la suite $(\mathrm{Card}(nA))$.

Énumérons les éléments de A : $A = \{g_1, \dots, g_t\}$ où $t = \mathrm{Card}(A)$.

On peut décrire nA comme l'image de l'application suivante

$$\psi : \begin{array}{rcl} \Omega_{n,t} & \to & nA \\ (a_1, \dots, a_t) & \mapsto & a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t \end{array}$$

où $\Omega_{n,t}$ est l'ensemble des t-uplets $(a_1, \dots, a_t)$ d'entiers naturels tels que $a_1 + \cdots + a_t = n$.

Cette application étant surjective, on a $\mathrm{Card}(\Omega_{n,t}) \geqslant \mathrm{Card}(nA)$, et la question **Q1.b** permet de conclure.

4

a Soit $a_M = \max A$ et $b_m = \min B$. Les ensembles $a_M + B$ et $b_m + A$ sont des parties de $A+B$, de cardinaux ceux de B et A respectivement, et dont le seul élément commun est $a_M + b_m$. On a donc bien :

$$\mathrm{Card}(A+B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1.$$

b Notons $a_1, \dots, a_p$ les éléments de A rangés dans l'ordre strictement croissant. De même pour $b_1, \dots, b_q$ et B.

En analysant la preuve de la question précédente (et grâce à l'hypothèse $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - 1$), les différents éléments de $A+B$ sont, dans l'ordre (strictement) croissant :

$$a_1 + b_1, a_2 + b_1, \dots, a_p + b_1, a_p + b_2, a_p + b_3, \dots, a_p + b_q$$

Par le même raisonnement, les différents éléments de $A+B$ sont également, dans l'ordre (strictement) croissant :

$$a_1 + b_1, a_1 + b_2, \dots, a_1 + b_q, a_2 + b_q, a_3 + b_q, \dots, a_p + b_q$$

Plus généralement, si on pose $d_1 = a_2 - a_1, \dots, d_{p-1} = a_p - a_{p-1}$, et $\delta_1 = b_2 - b_1, \dots, \delta_{q-1} = b_q - b_{q-1}$, alors, on peut passer de (a_1, b_1) à (a_p, b_q) en choisissant soit d'avancer l'abscisse de a_k à a_{k+1}, soit de b_s à b_{s+1}, et la liste des distances est inchangée.

On en déduit que si $i < p$ et $j < q$, alors $d_i = \delta_j$ (on prend un chemin de (a_1, b_1) à (a_i, b_j), que l'on complète une fois en avançant a, une fois en avançant b).

Ainsi tous les d_i et les δ_j sont égaux à une même constante d, ce qui établit le résultat.

5

a H est évidemment une partie de G, non vide car comprenant 0_G. De plus, pour tous $g, g' \in H$,

$$g + g' + A = g + (g' + A) = g + A = A,$$

et $-g + A = A$ en translatant de $-g$ la relation $A = g + A$.

H est bien un sous-groupe de G. Il est fini puisque $H + A = A$, et donc $\mathrm{Card}(H) \leqslant \mathrm{Card}(A)$.

b Le sens indirect est clair : supposons disposer de $b \in G$ tel que $B \subset b + H$. On a alors :

$$A + B \subset A + (b + H) = b + (A + H) = b + A,$$

donc $\mathrm{Card}(A+B) \leqslant \mathrm{Card}(A)$, puis $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$ d'après 3.a.

Réciproquement, supposons $\mathrm{Card}(A+B) = \mathrm{Card}(A)$. Soit $b \in B$. La partie $b + A$ de $A+B$ a même cardinal $(\mathrm{Card}(A))$ que cet ensemble fini : $b + A = A + B$. Soit $b' \in B$: on a de même $b' + A = A + B = b + A$, et donc, en translatant de $-b$: $b' - b + A = A$, *i.e.* $b' - b \in H$. On a donc $B \subset b + H$.

L'équivalence est bien montrée.

6 Commençons par observer que A, B et $A - B$ sont des ensembles finis et non vides, donc leurs cardinaux sont strictement positifs.

On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\sqrt{ab} \leqslant \max(a,b)$, de sorte que

$$\sqrt{\mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B)} \leqslant \max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$$

Or $\mathrm{Card}(A - B) \geqslant \max(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$ (preuve semblable à **Q3a**, ou même qui en provient en écrivant $A - B = A + (-B)$).

Établir l'inégalité triangulaire consiste à prouver que

$$\operatorname{Card}(A-B)\operatorname{Card}(B-C)\geqslant\operatorname{Card}(B)\operatorname{Card}(A-C)$$

L'application $(a,c)\mapsto a-c$ est clairement surjective de $A\times C$ dans $A-C$.

On peut donc considérer une partie H de $A\times C$ équipotente à $A-C$ par $(a,c)\in H\mapsto a-c$.

L'application

$$\Delta:\begin{array}{rcl} H\times B & \to & (A-B)\times(B-C)\\ ((a,c),b) & \mapsto & (a-b,b-c)\end{array}$$

est injective, donc

$$\operatorname{Card}(A-C)\operatorname{Card}(B)=\operatorname{Card}(H)\operatorname{Card}(B)\leqslant\operatorname{Card}(A-B)\operatorname{Card}(B-C)$$