DS3 de MP
15.10.22

Devoir surveillé

Durée : 4h

En dehors de sa dernière question, la partie **II** est indépendante de la partie **I**. La partie **0** permet de calculer l'intégrale de Dirichlet en **I.1.b.i**.

Partie 0 – Préliminaires pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$.

.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien convergente.

.2 Montrer que (J_n) est une suite constante.

.3 On définit la fonction φ par $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

a Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

b En déduire que $\int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puis que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie I – Intégrales généralisées de Dirichlet

I.1 Les sous-questions sont indépendantes.

a On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b

i Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$, et vérifier (grâce à la partie **0**) qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

ii Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\mathrm{d}t$.

c Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $\varphi : t \mapsto \ln(g(t))$.

d On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner, lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\mathrm{d}t$.

I.2 Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

a Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n}\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque – $\sin^n$ est la fonction sin élevée à la puissance n (*i.e.* $\sin^n(t) = (\sin(t))^n$ pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$), et non l'itérée n fois de la fonction sin.

b Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$?

I.3 On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n(t)$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

a Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a $|h_n^{(k)}(t)| \leqslant K$.

b

i Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii Établir l'égalité : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

c Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\mathrm{d}t$.

d Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\mathrm{d}t$$

I.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a Établir, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$$

b En déduire, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)$$

c En déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$$

I.5 Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

a Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

b

i Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Indication – On pourra, en utilisant le résultat de la question **I.1.c**, donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

c

i Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a[$, on a : $|e^{-u} - 1| \leqslant 2u$.

ii Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$$

Indication – On utilisera le résultat de la question **I.1.c**.

iii En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) \mathrm{d}t$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \frac{\ln^4(n)}{n}$$

d En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

Indication – On se souviendra du résultat **I.1.d**.

Partie II – Montées d'une permutation de $[\![1, n]\!]$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, **montée** d'une liste $a = (a_1, \dots, a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ (avec $p \leqslant q$) vérifiant les conditions

$$(p = 1 \text{ ou } a_{p-1} > a_p) \text{ et } (a_p < a_{p+1} < \dots < a_q (\text{si } p < q)) \text{ et } (q = n \text{ ou } a_q > a_{q+1})$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a. Par exemple, les montées de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2,5,7)$, (6), $(1,4)$ et $(3,8)$, et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont (2), (5), $(7,6,1)$, $(4,3)$, et (8), et donc $D(a) = 5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1,n]\!]$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n, on a $1 \leqslant M(a) \leqslant n$ et $1 \leqslant D(a) \leqslant n$.

Enfin, pour tout entier naturel k, on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{Card}\{a \in S_n, M(a) = k\}$. On a donc $E_n(0) = 0$, ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

II.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

b Soit $k \in [\![1,n]\!]$ un entier fixé. Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

II.2 Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n, la valeur de $M(a) + D(a)$.
Indication – En notant, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, \dots, a_i)$, on évaluera, en fonction du nombre s_i, la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, \dots, a_{i+1})$.

II.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe, à toute liste $a = (a_1, \dots, a_n)$ de S_n, la liste

$$\psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n)$$

a Vérifier que l'application ψ est une bijection de S_n sur S_n.

b En déduire, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, l'égalité : $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

II.4 Calcul de $E_n(2)$

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

a Quel est le nombre de couples (A, B) de parties **non vides** de $[\![1,n]\!]$ tels que

$$A \cup B = [\![1,n]\!] \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

b Établir l'égalité : $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

II.5 Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1}, on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a. Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3,4,1,5,6,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$ et si $a = (6,3,4,1,5,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$.

a Soit $b = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de S_n. Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

b Soit k dans $[\![1,n]\!]$ et soit b dans S_n tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

c Établir, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, l'égalité :

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

d Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

II.6 La formule de Worpitzky

Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$$

Indication – On raisonnera par récurrence sur l'entier n.

II.7 Une égalité miraculeuse !

Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t$$