Corrigé du DS3

Problème A – Intégrales généralisées de Dirichlet et mmontées d'une permutation

Partie 0 – Préliminaires pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tend vers $(2n+1)$ en 0 : elle se prolonge en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc J_n est faussement impropre.

.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale,

$$J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(2nt)\sin(t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

donc (J_n) est une suite constante.

.3

a φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ par opérations algébriques.

De plus,

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} = \frac{-\frac{t^3}{6} + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^3)}{t(t + \mathrm{o}_{t \to 0}(t))} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-t}{6}$$

donc φ est continue en 0.

Enfin, pour tout $t \in]0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{-1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\
&= \frac{t^2\cos(t) - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} \\
&= \frac{t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^2)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^3)\right)^2}{t^4 + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^4)} \\
&= \frac{(1-1)t^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{2}{6}\right)t^4 + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^4)}{t^4 + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^4)} \\
&\underset{t \to 0}{\sim} -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ (et $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$).

Remarque – Le fait que φ soit dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ est une conséquence du théorème de prolongemen $\mathcal{C}^1$, mais cela provenait aussi de l'équivalent $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-t}{6}$. De toute façon, il fallait montrer que φ' était continue en 0 (et donc faire le calcul ci-dessus).

b C'est un cas particulier du lemme de Lebesgue, facile à montrer parce qu'une intégration par parties est possible (grâce à la question précédente) :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\varphi(t)\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi'(t)\cos((2n+1)t)}{2n+1}\mathrm{d}t$$

Or φ et φ' sont continues et donc bornées sur le *segment* $[0, \pi/2]$:

$$\left|\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\,\|\varphi\|_{\infty,[0,\pi/2]}}{2n+1} + \frac{\pi}{2} \times \frac{\|\varphi'\|_{\infty,[0,\pi/2]}}{2n+1}$$

et donc $\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$ tend bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Par convergence de $\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$ et de J_n, on en déduit par linéarité (la convergence de la première intégrale et)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t + J_n$$

Or (J_n) est constante (question **0.1**), de valeur $J_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ tend bien vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie I – Intégrales généralisées de Dirichlet

I.1

a g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$.

Elle est continue en 0 par l'équivalent $\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} = \frac{t(1 + \mathrm{o}_{t\to 0}(t)) - (t + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^2))}{t^2} = \mathrm{o}_{t\to 0}(1)$$

donc $f'(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 (en étant différent de 0).

D'après le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque – Les 5/2 pouvaient montrer très rapidement que f était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (car développable en série entière sur $\mathbb{R}$).

b

i f est une fonction continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (borne 0 comprise), donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est faussement impropre.

Étude en $+\infty$: les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, le crochet $[uv]_1^{+\infty}$ est bien défini, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ a même nature que $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, qui est convergente car absolument convergente (par $\frac{\cos(t)}{t^2} = \mathrm{O}_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$).

En reprenant **0.3**, et en procédant au changement de variable $u = (2n+1)t$ (bijection[1] $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0, \pi/2]$ sur $]0, (2n+1)\pi/2]$), on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$$

donc $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers l'infini.

Par unicité de la limite, il vient bien

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

ii Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $t \mapsto jt$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{j}}\frac{\mathrm{d}u}{j} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

c On a

$$g(t) = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4)$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln(g(t)) &= \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4)\right) \\
&= -\frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4)\right)^2 + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4) \\
&= -\frac{t^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{72}\right)t^4 + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4) \\
&= -\frac{t^2}{6} - \frac{1}{180}t^4 + \mathrm{o}_{t\to 0}(t^4)
\end{aligned}$$

1. On peut même travailler sur le segment $[0, \pi/2]$ en prolongeant par continuité, le théorème de changement de variable de PCSI s'applique alors, il suffit donc de mentionner le caractère $\mathcal{C}^1$ de $t \mapsto (2n+1)t$.

d On effectue un changement de variable de sorte à avoir $\frac{u^2}{2} = \frac{nt^2}{6}$: on effectue le changement de variable linéaire $u = \sqrt{\frac{n}{3}} \times t$.

On a

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

et donc, d'après le résultat rappelé,

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

I.2

a L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} \mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, et $\frac{\sin^n(t)}{t^n} = \mathrm{O}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $n \geqslant 2$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} \mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc convergente.

b Par intégration par parties (on dérive $\sin^2$, et on intègre $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $t \mapsto \frac{-1}{t}$), et comme le crochet est nul,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

d'après **I.1.b.ii**.

I.3

a h_n est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $h_n^{(k)}$ est 2π-périodique et continue. Son image est l'image du *segment* $[0, 2\pi]$: c'est un segment d'après le théorème de Weierstrass, donc $h_n^{(k)}$ est bornée : il existe un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a $|h_n^{(k)}(t)| \leqslant K$.

b

i

$$h_n(t) = (t + \mathrm{o}_{t \to 0}(t))^n = t^n(1 + \mathrm{o}_{t \to 0}(1))^n = t^n + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^n)$$

ii Puisque h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a, d'après la question précédente,

$$h_n^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} + \mathrm{o}_{t \to 0}(t^{n-k})$$

ce qui donne bien

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

c D'après la question précédente **I.3.b.ii**, la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (borne 0 comprise), et, d'après la question **I.3.a**, on a $\varphi(t) = \mathrm{O}_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^{n-k}}\right)$.

Comme $n - k \geqslant 2$, $t \mapsto \frac{1}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (exemple de Riemann), donc φ aussi, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$ est donc absolument convergente.

d Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on formule l'hypothèse de récurrence suivante : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$ converge, et

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t$$

L'amorçage au rang 0 est clair (la convergence de l'intégrale a été établie en **I.2.a**).

Fixons $k \in [\![0, n-2]\!]$, supposons le résultat établi à ce rang, et déduisons-en le résultat au rang $k+1$.

On effectue une intégration par parties, en posant $u = h_n^{(k)}$, $v : t \mapsto \frac{1}{k-n+1} \times \frac{1}{t^{n-k-1}}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ est bien défini et vaut 0 (en 0 grâce à **I.3.b.ii**, en $+\infty$ grâce à **I.3.a**).

Par hypothèse de récurrence, $\frac{(n-k-1)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) \mathrm{d}t$ est convergente, égale à $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

Par intégration par parties, on en déduit que $\frac{-(n-k-1)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) \mathrm{d}t$ converge, et est égale à $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$, ce qui donne bien l'hérédité.

Pour $k = n-1$, on obtient bien le résultat voulu.

I.4

a Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la formule d'Euler pour le sinus ($\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$), la formule du binôme de Newton, et la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
h_{2n}(t) &= \sin^{2n}(t) \\
&= \frac{1}{(2i)^{2n}}\left(e^{it} - e^{-it}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{(-1)^n\,4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-e^{-it})^k(e^{it})^{2n-k} \\
&= \frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k e^{-ikt} \times e^{i(2n-k)t} \\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k} \times e^{i(2n-2k)t}
\end{aligned}$$

b En dérivant $2n-1$ fois par rapport à t dans la relation obtenue à la question précédente **I.4.a**, on a, pour tout réel t :

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}i^{2n-1}(2n-2k)^{2n-1}\,e^{i(2n-2k)t}$$

et donc

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{2^{2n-1}}{4^n\,i}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}(-1)^n\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}\,e^{i(2n-2k)t}$$

En effectuant le changement d'indice $j = n-k$, on obtient

$$\begin{aligned}
h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n}(-1)^{2n-j}(-1)^n\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,e^{2ijt} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{j=-n}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,e^{2ijt} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,e^{2ijt} + (-1)^{n-j}\binom{2n}{n-j}(-j)^{2n-1}\,e^{-2ijt}\right) \quad \text{(le terme d'indice 0 est nul)} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,e^{2ijt} + (-1)^{n+j}\binom{2n}{2n-(n-j)}(-1)j^{2n-1}\,e^{-2ijt}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,\left(e^{2ijt} - e^{-2ijt}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,\sin(2jt) \quad \text{(par formule d'Euler)}
\end{aligned}$$

c D'après la question précédente **I.4.b** et **I.3.d** (appliquée en changeant n en $2n$), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(2n-1)}(t)}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\,\frac{\sin(2jt)}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2jt)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{(les intégrales convergent bien)} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{2n}{n+j}j^{2n-1} \quad \text{(d'après \textbf{I.1.b.ii})}
\end{aligned}$$

I.5

a Par convergence des intégrales ci-dessous, et croissance de l'intégrale, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^n \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

Comme $\frac{2}{\pi} \in]0,1[$, on en déduit bien que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Remarque – On a même trouvé beaucoup mieux qu'indiqué.

b

i La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\varphi'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2}$$

Or $t\cos(t) - \sin(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par exemple parce que cette fonction dérivable est nulle en 0, de dérivée $t \mapsto -t\sin(t)$ négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, φ est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii D'après la question précédente **I.5.b.i**, et par positivité de $\frac{\sin(t)}{t}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$0 \leqslant \int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right)^n$$

Or $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \mathrm{O}(1)$, et, d'après la question **I.1.c**

$$n\ln\left(\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right) = n\left(-\frac{\varepsilon_n^2}{6} + \mathrm{o}(\varepsilon_n^3)\right) = -\frac{\ln(n)^2}{6} + \mathrm{o}(1)$$

donc par continuité de exp en 0

$$\left(\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right)^n \underset{n\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{\ln(n)^2}{6}\right)$$

Or $\exp\left(-\frac{\ln(n)^2}{6}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, car

$$\sqrt{n}\exp\left(-\frac{\ln(n)^2}{6}\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{2} - \frac{\ln(n)^2}{6}\right)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On a donc bien :

$$\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

c

i $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{-u}-1}{u} = -1$ par dérivabilité de $x \mapsto e^{-x}$ en 0, donc il existe $a > 0$ tel que, pour tout $u \in]0, a[$, on ait $\left|\frac{e^{-u}-1}{u}\right| \leqslant 2$, et donc $|e^{-u} - 1| \leqslant 2u$ pour tout $u \in [0, a[$ (en 0, on a égalité).

ii D'après **I.1.c**,

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^4}{180}$$

donc, au voisinage de 0,

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$$

et comme

$$t^3 + \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \underset{t\to 0}{\sim} t^3$$

on a, au voisinage à droite de 0 :

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6}$$

Ainsi, il existe bien $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$$

iii D'après la question précédente, on a, pour tout $t \in]0, b]$:

$$-t^3 - \frac{t^2}{6} \leqslant \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \leqslant -\frac{t^2}{6}$$

En multipliant par $n > 0$, puis en prenant l'exponentielle (croissante) :

$$\exp(-nt^2/6) \times \exp(-nt^3) \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \leqslant \exp(-nt^2/6)$$

soit, en retranchant $\exp(-nt^2/6)$:

$$\exp(-nt^2/6) \times \big(\exp(-nt^3) - 1\big) \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-nt^2/6) \leqslant 0$$

et donc

$$\left|\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-nt^2/6)\right| \leqslant \big(1 - \exp(-nt^3)\big)$$

Pour n assez grand, $\varepsilon_n \in]0, b]$, et donc, en intégrant sur $]0, \varepsilon_n]$, on obtient bien

$$\left|\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) \mathrm{d}t$$

Pour n assez grand, on a en outre $n \times \varepsilon_n^3 \in]0, a]$ (cf. **I.5.c.i**), et donc

$$\forall\, t \in]0, \varepsilon_n], \quad \left|1 - e^{-nt^3}\right| \leqslant 2(nt^3) \leqslant 2n\varepsilon_n^3$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon_n \times 2n\varepsilon_n^3 = 2\frac{\ln(n)^4}{n}$$

Ainsi, quand l'entier n est assez grand, on a

$$\left|\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\frac{\ln^4(n)}{n}$$

d D'après **I.5.a**, **I.5.b.ii**, et la question précédente **I.5.c.iii**, on a (par relation de Chasles)

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{\ln^4(n)}{n}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

D'après **I.1.d**, et comme $\sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$ est prépondérant (lorsque n tend vers l'infini) devant $\frac{\ln^4(n)}{n}$, on obtient bien

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

Partie II – Montées d'une permutation de $[\![1, n]\!]$

II.1

a Le seul élément de S_n n'ayant qu'une montée est $(1, 2, \ldots, n)$, donc $E_n(1) = 1$.

Le seul élément de S_n ayant n montées est $(n, n-1, \ldots, 1)$, donc $E_n(n) = 1$.

b Il suffit de prendre $a = (k-1, k-2, \ldots, 1, k, k+1, \ldots, n)$: les k montées sont $(k-1)$, $(k-2)$, …, (1) et $(k+1, \ldots, n)$.

II.2 $s_1 = 2$, et $s_{i+1} = s_i + 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, puisque le terme ajouté est soit (strictement) inférieur au précédent (auquel cas le nombre de montées est incrémenté de 1 et le nombre de descentes inchangé), soit (strictement) supérieur au précédent (auquel cas le nombre de montées est inchangé, et le nombre de descentes est incrémenté de 1).

Ainsi, $M(a) + D(a) = n + 1$.

II.3

a L'application ψ envoie bien un élément de S_n sur un élément de S_n (les n termes de la liste sont bien dans $[\![1,n]\!]$ et distincts deux à deux). Comme ψ est involutive (*i.e.* $\psi \circ \psi = \mathrm{Id}_{S_n}$), elle est bijective.

b Soit $a \in S_n$. Le nombre de montées de $\psi(a)$ est le nombre de descentes de a (puisque passer de a à $\psi(a)$ revient à parcourir la liste en sens inverse). D'après la question **II.2**, on a donc

$$M(\psi(a)) = D(a) = n + 1 - M(a)$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la bijection ψ envoie $\{a \in S_n, M(a) = k\}$ sur $\{a \in S_n, M(a) = n+1-k\}$: ces deux ensembles sont donc équipotents, ce qui donne bien $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

II.4

a Deux parties A et B de $[\![1,n]\!]$ étant données, la condition $A \cup B = [\![1,n]\!]$ et $A \cap B = \emptyset$ signifie que $B = [\![1,n]\!] \setminus A$, *i.e.* que B est le complémentaire de A dans $[\![1,n]\!]$: le nombre de couples cherchés est donc le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ non vides, et différentes de $[\![1,n]\!]$. Comme $n \geqslant 1$, ce nombre vaut $2^n - 2$.

b Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in S_n$. Dire que $M(a) = 2$, c'est dire qu'il existe un $p \in [\![2, n-1]\!]$ tel que $(a_1, \ldots, a_{p-1})$ soit strictement croissante, que $a_{p-1} > a_p$, et que $(a_p, \ldots, a_n)$ soit strictement croissante.

Cela revient donc à se donner la partie non vide $A = \{a_1, \ldots, a_{p-1}\}$, son complémentaire non vide $B = \{a_p, \ldots, a_n\}$, ce choix étant assujetti à la condition $\max(A) > \min(B)$. Or la condition contraire signifie que $(a_1, \ldots, a_n) = (1, \ldots, n)$ (unique suite strictement croissante de $[\![1,n]\!]$), et il y a alors $n-1$ choix possibles pour A.

Ainsi, d'après la question précédente,

$$E_n(2) = 2^n - 2 - (n-1) = 2^n - (n+1)$$

II.5

a Les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b sont $((n+1), a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(a_1, (n+1), a_2, a_3, \ldots, a_n)$, ..., $(a_1, \ldots, a_{n-1}, (n+1), a_n)$ et $(a_1, \ldots, a_n, (n+1))$.

b Parmi les $n+1$ antécédents de b par φ_n cités ci-dessus, le premier a pour nombre de montées $M(b)+1$, le suivant a pour nombre de montées $M(b)$ (resp. $M(b)+1$) si $a_1 > a_2$ (resp. $a_1 < a_2$), les suivants ont aussi $M(b)$ ou $M(b)+1$ montées, et le dernier en a toujours $M(b)$.

Plus précisément :

1. Si $k = 1$, et donc $b = (1, \ldots, n)$, les $n+1$ antécédents de b ont deux montées, à l'exception du $(1, \ldots, n+1)$, qui n'en a qu'une.
2. Si $k \in [\![2,n]\!]$, alors parmi les $n+1$ antécédents de b, k d'entre eux ont $M(b)$ montées (ceux pour lesquels on insère $(n+1)$ à la fin d'une montée), et $n+1-k$ en ont $M(b)+1$.

c Soit $k \in [\![1,n]\!]$, et soit $a \in S_{n+1}$ tel que $M(a) = k+1$. Il y a deux possibilités pour le nombre de montées de $\varphi_n(a)$: ce nombre vaut soit $M(a)$, c'est-à-dire $k+1$, soit $M(a)-1$, c'est-à-dire k.

Ainsi, $\{a \in S_{n+1}, M(a) = k+1\}$ est l'union disjointe de

$$\{a \in S_{n+1}, M(a) = k+1 \quad \text{et} \quad M(\varphi_n(a)) = k\} \quad \text{et} \quad \{a \in S_{n+1}, M(a) = k+1 \quad \text{et} \quad M(\varphi_n(a)) = k+1\}$$

Or le premier ensemble est de cardinal $E_n(k) \times (n+1-k)$ d'après la question précédente **II.5.b**, et le second est de cardinal $E_n(k+1) \times (k+1)$ d'après cette même question.

Ainsi, par union disjointe, il vient bien

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

Pour $k = 0$, $E_{n+1}(k+1) = 1$, $E_n(k+1) = 1$, et $E_n(k) = 0$, puis

$$(k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k) = 1$$

de sorte que la formule tient toujours dans ce cas.

Si $k > n$, alors tout est nul et la formule tient toujours.

d On utilise **II.1.a**, **II.3.b**, **II.4.b**, et enfin **II.5.c** pour le calcul de $E_5(3)$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

II.6 Comme indiqué, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, il s'agit de vérifier que $E_1(1) = (-1)^0 \binom{2}{0} 1^1$, ce qui est bien vrai car les deux termes valent 1.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir établi la formule à ce rang, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente,

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned}
E_{n+1}(k+1) &= (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k) \\
&= (k+1)\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{n+1}{k+1-j}j^n + (n+1-k)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n+1}{k-j}j^n \\
&= (k+1)(-1)^{k+1-(k+1)}\binom{n+1}{k+1-(k+1)}(k+1)^n \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+1-j}\left((k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j}\right)j^n \\
&= (k+1)^{n+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+1-j}\left((k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j}\right)j^n
\end{aligned}$$

Or

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j} = (n+1)!\left(\frac{k+1}{(k+1-j)!(n+j-k)!} - \frac{n+1-k}{(k-j)!(n+1+j-k)!}\right)$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1+j-k)!}\left((k+1)(n+1+j-k) - (n+1-k)(k+1-j)\right)$$

Or

$$(k+1)(n+1+j-k)-(n+1-k)(k+1-j) = (k+1)(n+1+j-k-(n+1-k))+j(n+1-k) = (k+1)j+j(n+1-k) = j(n+2)$$

donc

$$\begin{aligned}
(k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j} &= \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1+j-k)!} \times (j(n+2)) \\
&= j \times \frac{(n+2)!}{(k+1-j)!(n+2+j-(k+1))!} = j \times \binom{n+2}{k+1-j}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
E_{n+1}(k+1) &= (k+1)^{n+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+1-j}\binom{n+2}{k+1-j}j^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{n+2}{k+1-j}j^{n+1}
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité lorsque $k \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire $k + 1 \in [\![2, n+1]\!]$.
Enfin, la formule est directement vérifiée pour $k = 1$, ce qui prouve bien au final l'hérédité.
La formule de Worpitzky est donc bien vérifiée.

II.7 D'après la question précédente **II.6**, en remplaçant n par $2n-1$ et k par n (on a bien $2n-1 \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![1, 2n-1]\!]$), on a

$$E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}$$

Or $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ et $\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{2n-(n-j)} = \binom{2n}{n+j}$, de sorte que, grâce à **I.4.c**,

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)!\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t$$