Équivalents usuels

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\ln x &\underset{x\to1}{\sim} x-1 \\
\mathrm{e}^x &\underset{x\to0}{\sim} 1 \\
\mathrm{e}^x-1 &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\sin x &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\cos x &\underset{x\to0}{\sim} 1 \\
\tan x &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\mathrm{sh}\ x &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\mathrm{ch}\ x &\underset{x\to0}{\sim} 1 \\
(1+x)^\alpha-1 &\underset{x\to0}{\sim} \alpha x \qquad\quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \\
x^\alpha-1 &\underset{x\to1}{\sim} \alpha(x-1) \quad \text{avec } \alpha\in\mathbb{R} \\
\mathrm{Arcsin}\ x &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\mathrm{Arccos}\ x &\underset{x\to0}{\sim} \frac{\pi}{2} \\
\mathrm{Arctan}\ x &\underset{x\to0}{\sim} x \\
\ln(1+x)-x &\underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \\
\sin x-x &\underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \\
\cos x-1 &\underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \\
\mathrm{sh}\ x-x &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{6} \\
\mathrm{ch}\ x-1 &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Développements limités usuels (en zéro)

Définition 1. *Soit f définie sur un intervalle I non vide, non réduit à un point. On dit que f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n s'il existe des scalaires $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Proposition 1. *Si f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n, alors ce développement est unique.*

Proposition 2. *Soit f définie sur un intervalle I centré en zéro et qui admet un développement limité en zéro à l'ordre n.*

- *Si f est paire, les termes d'ordre impair sont nuls ;*
- *Si f est impaire, les termes d'ordre pair sont nuls.*

Remarque : Les développements qui suivent sont écrits avec une relation O ce qui améliore, sans effort, la précision du développement.

$$\begin{array}{rcccccc}
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2 & + \ldots + & x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
\dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2 & + \ldots + & (-1)^n x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 & + \ldots + & \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
\mathrm{Arctan}\, x & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\[2ex]
\ln(1-x) & = & -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} & + \ldots + & -\dfrac{x^n}{n} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
\ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} & + \ldots + & (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
\mathrm{e}^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} & + \ldots + & \dfrac{x^n}{n!} & + \mathrm{O}(x^{n+1}) \\[2ex]
\sin x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\[2ex]
\cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} & + \ldots + & (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+2}) \\[2ex]
\mathrm{sh}\, x & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} & + \ldots + & \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+3}) \\[2ex]
\mathrm{ch}\, x & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} & + \ldots + & \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & + \mathrm{O}(x^{2n+2})
\end{array}$$