ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f(e_i) = v$ pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$ avec $v \in \mathrm{E}$.

1. Donner le rang de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 (CCINP 2023)

On pose $\qquad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,; 1\,] \qquad f_n(x) = (x^2 + 1)\dfrac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n + x}$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Déterminer $\qquad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par $\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = p_n$ pour n entier. La fonction génératrice de X est notée $\mathrm{G_X}$ et elle est définie par $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]\,-1\,;1\,[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $\mathrm{G_X}$.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$. Montrer que $\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1}(t)\mathrm{G}_{\mathrm{X}_2}(t)$ pour $t \in \,]\,-1\,;1\,[$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}})$.

   Remarque : On admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotées 2. Soit n entier non nul. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in \,]\,-1\,;1\,[$. Déterminer $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\,\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable par f pour tout $x \in \mathrm{E}$.
3. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2n$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre en $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Exercice 6 (Mines 2023)

1. Soit $\mathrm{A} \geqslant 0$ et f, g dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
2. On considère l'équation différentielle
$$x'' + a(t)x = b(t) \tag{$*$}$$
avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et b et $t \mapsto ta(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Soit x une solution de $(*)$.
   (a) Établir
$$\forall t \geqslant 1 \qquad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t (t-u)b(u)\,\mathrm{d}u$$
   (b) On pose
$$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$$
   Montrer qu'il existe $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que
$$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) \leqslant \mathrm{K} \exp\left(\int_1^t u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant \mathrm{K} \exp\left(\int_1^{+\infty} u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right)$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler puis, pour n entier non nul, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
2. Pour n entier non nul, calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $\mathrm{C} = \big(i \wedge j\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec n entier non nul.

Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(\mathrm{A}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}{\mathrm{Max}} |\lambda|$. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)|}$$

1. Si $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ est un singleton, montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(\mathrm{A})$.
2. Donner un exemple de matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.
3. On suppose que la matrice A admet au moins deux valeurs propres distinctes.
   (a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_n$.
   (b) Montrer que $\rho(\mathrm{A})$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.