ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°1

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$. On suppose f continue sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;x_0\,[$ et $]\,x_0\,;b\,[$. Montrer que si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 avec
$$f'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$$
3. Montrer que l'implication suivante est fausse :
$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$
On pourra considérer g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 2 (CCINP 2023)

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ avec $n \geqslant 2$ et α réel.
   (a) Si $\alpha \leqslant 0$, en utilisant une minoration simple de u_n, montrer que la série diverge.
   (b) Si $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Établir $\qquad \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \qquad (\mathrm{PQ})(u) = \mathrm{P}(u)\circ \mathrm{Q}(u)$
2. (a) Montrer $\qquad \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \qquad \mathrm{P}(u)\circ\mathrm{Q}(u) = \mathrm{Q}(u)\circ\mathrm{P}(u)$
   (b) Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$. Montrer
$$\mathrm{P} \text{ annulateur de } u \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{PQ} \text{ annulateur de } u$$
3. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_{A} puis en déduire que $\mathrm{R} = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X}$ est annulateur de A.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Exercice 5 (Mines 2023)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la différentiabilité de f.

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète positive.

1. Montrer $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
2. On suppose $\mathbb{E}(\mathrm{X}) < +\infty$. Établir
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
3. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose
$$\forall (n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega \qquad \mathrm{R}_n(\omega) = \mathrm{Card}\,\{\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega)\}$$
   (a) Établir $\qquad \mathbb{E}(\mathrm{R}_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i = k\}\right)$
   (b) Si les X_i suivent la loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$, déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(\mathrm{R}_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Dans le cas général, montrer $\mathbb{E}(\mathrm{R}_n) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(n)$.

Exercice 7 (Centrale 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note
$$\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \ : \ \forall v \in \mathrm{A} \quad u \circ v = v \circ u\}$$
L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. On suppose f nilpotent d'indice n. Montrer $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.
3. Soient G_1, G_2 sev supplémentaires stable par f. On note $f_i = f_{\mathrm{G}_i}$ pour $i \in \{1,2\}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$ et $\mathcal{B}(f_i) = \mathbb{K}[f_i]$ pour $i \in \{1,2\}$. Montrer $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 8 (Centrale 2023)

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t$ pour n entier non nul et $a_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence R est $\geqslant 1$.
2. On note S sa somme sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \,]-1\,;1\,[$ puis établir $\mathrm{R} = 1$.
3. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to +\infty$.