ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Soit $(u_n)_n$ suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^n u_n$.

2. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 2 (CCINP 2023)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence
$$\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$$
2. Montrer que pour $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{A}^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Établir $\mathrm{A}^2\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$.

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par
$$\forall (j,k) \in \mathrm{N}^2 \qquad \mathbb{P}((\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (j,k)) = \frac{(j+k)}{\mathrm{e}\,2^{j+k} j! k!}$$
1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}})$ puis la calculer.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ tels que $(\mathrm{X}-1)^n\mathrm{Q} + \mathrm{X}^n\mathrm{P} = 1$.
1. Montrer qu'il existe un unique couple $(\mathrm{P}_0,\mathrm{Q}_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^2$.
2. Décrire $\mathcal{S}$.

Exercice 5 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie et soit $(u_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $(\|u_n - x\|)_n$ converge.
1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 6 (Mines 2023)

On pose $$\forall (s,t) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad \mathrm{K}(s,t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que la fonction K admet un maximum et un minimum sur $[\,0\,;1\,]^2$ puis les déterminer.

Exercice 7 (Mines 2023)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^k) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})^k)$$

Exercice 8 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [\,0\,;1\,]$. On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \ldots & \mathrm{X}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{U}^\top \mathrm{U}$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$.
2. Calculer la probabilité que la matrice M soit une matrice de projection.

Exercice 9 (Centrale 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1. Montrer que C_n est entier pour tout n entier.
2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k}$ pour n entier.
3. Déterminer les entiers n non nuls tels que C_n soit impair.

Exercice 10 (Centrale 2023, X 2019)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe fini d'ordre n. On note $\widehat{\mathrm{G}}$ l'ensemble des morphismes de $(\mathrm{G}, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G. Que peut-on dire de l'ordre de $g \in \mathrm{G}$?
   (b) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$, préciser les valeurs possibles pour $\varphi(g)$ avec $g \in \mathrm{G}$.
   (c) Montrer que l'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est fini. On note $\widehat{n}$ son cardinal.
2. (a) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$, montrer $\sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.
   (c) En déduire $\widehat{n} \leqslant n$.
   (d) Si le groupe $(\mathrm{G}, \star)$ est cyclique, établir $\widehat{n} = n$.
3. On suppose $(\mathrm{G}, +)$ abélien fini.
   (a) Pour $x \in \mathrm{G}$, on note $\delta_x : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(x)$. Vérifier que $\delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ pour $x \in \mathrm{G}$ puis établir que l'application $\Phi : \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme.
   (b) En déduire $\widehat{n}$.