

Préparation à l'oral - Feuille n°1

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a; b[$. On suppose f continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; x_0[$ et $]x_0; b[$. Montrer que si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 avec

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$$

3. Montrer que l'implication suivante est fausse :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$

On pourra considérer g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé : Exercice 4 CCINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ avec $n \geq 2$ et α réel.
 - (a) Si $\alpha \leq 0$, en utilisant une minoration simple de u_n , montrer que la série diverge.
 - (b) Si $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Corrigé : Exercice 5 CCINP 2023

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Établir $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
2. (a) Montrer $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$
 (b) Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Montrer
 $P \text{ annulateur de } u \implies PQ \text{ annulateur de } u$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A puis en déduire que $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est annulateur de A .

Corrigé : Exercice 65 CCPINP 2023

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Pour x réel, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. L'intégrande est impaire et on va donc se restreindre à l'étude sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

avec $X = \mathbb{R}_+$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{xt}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} x \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur I .

- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est dans $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Par imparité, on étend le résultat sur $\mathbb{R}$ et on conclut

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Soit $x \geq 0$ et $x \neq 1$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right]$$

On suppose également $x \neq 0$ pour l'intégration du second membre. Il vient

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right] dt = \frac{1}{1-x^2} \frac{\pi}{2} (1-x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour $x = 0$. Par ailleurs, comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x)$ et par conséquent

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u + 1 - x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)} \frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $u = t^2$.

Par intégration, il vient

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u) \, du = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$$

En complétant par imparité de F , on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la différentiabilité de f .

Corrigé : La fonction f est rationnelle bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d'où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$. On observe

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad |f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x| \quad \text{et} \quad |x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où la continuité de f en $(0, 0)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et $\forall y \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$

ce qui prouve que la fonction f admet des dérivées partielles en x et y en $(0, 0)$. Si la fonction f est différentiable en $(0, 0)$, on a

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + o(\|(x, y)\|) = \sqrt{x^2 + y^2}o(1)$$

Or, on observe, pour $t \neq 0$

$$\frac{f(t, t)}{\sqrt{2t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

ce qui contredit la fait que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}o(1)$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas différentiable en } (0, 0).}$$

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète positive.

1. Montrer $\mathbb{P}(X \geq x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

2. On suppose $\mathbb{E}(X) < +\infty$. Établir

$$\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\forall (n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega \quad R_n(\omega) = \text{Card} \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

(a) Établir
$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i = k\}\right)$$

(b) Si les X_i suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$, déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(R_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) Dans le cas général, montrer $\mathbb{E}(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

Corrigé : 1. Soit x réel. On a $\{X \geq x\} \subset \{X \geq [x]\}$ et par continuité décroissante

$$\mathbb{P}(X \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X \geq n\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

2. Soit x réel. Par positivité de X , on a

$$X \geq X \mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \geq x \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}$$

d'où
$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}) \geq x \mathbb{P}(X \geq x)$$

On note $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. On a

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{1}_{[0; x_k]}(x) \mathbb{P}(X = x_k)$$

On pose
$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad u_k(x) = x_k \mathbb{1}_{[0; x_k]}(x) \mathbb{P}(X = x_k)$$

La série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a pour k entier $\|u_k\|_\infty = x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ terme de série convergente puisque la variable X est d'espérance finie. On observe

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par double limite, il vient

$$\sum_{k=0}^n u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_k(x) = 0$$

Autrement dit
$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Et on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

3.(a) 1. Soient a et n entiers. On a

$$\{X_1, \dots, X_n\} = (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket 1; a \rrbracket) \sqcup (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad R_n &= \text{Card} (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket 1; a \rrbracket) + \text{Card} (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket) \\ &= \sum_{k=1}^a \mathbb{1}_{k \in \{X_1, \dots, X_n\}} + \text{Card} (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^a \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i = k\} \right) + \alpha_{n,a} \quad \text{avec} \quad \alpha_{n,a} = \mathbb{E}(\text{Card} \{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket)$$

$$\text{On a} \quad \{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket = \bigcup_{k=1}^n \{X_k\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket$$

$$\text{d'où} \quad \text{Card} (\{X_1, \dots, X_n\} \cap \llbracket a+1; +\infty \rrbracket) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \geq a+1\}}$$

$$\text{et par conséquent} \quad \alpha_{n,a} \leq n\mathbb{P}(X_1 \geq a+1) \underset{a \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

Faisant tendre $a \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i = k\} \right)}$$

3.(b) On note $q = 1 - p$. Soient n et k entiers non nuls. On a

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i = k\} \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \neq k\} \right) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \neq k)^n = 1 - (1 - pq^{k-1})^n$$

$$\text{Ainsi} \quad \mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - (1 - pq^k)^n)$$

$$\text{On pose} \quad \forall t \geq 0 \quad f(t) = 1 - (1 - pq^t)^n$$

On a $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par composition. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

et par sommation

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \int_0^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^N f(k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^N f(k) \leq f(0) + \int_0^N f(t) dt$$

$$\text{On a} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} 1 - (1 - npq^t + o(q^t)) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} npq^t = npe^{t \ln q}$$

On en déduit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$ et faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ dans l'encadrement précédemment établi, il vient

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \mathbb{E}(R_n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

On réalise le changement de variables $u = 1 - pq^t$ qui équivaut à $t \ln q = \ln(1 - u) - \ln p$ d'où $dt = -\frac{du}{(1-u) \ln q}$. bla blab

$$\int_0^{+\infty} (1 - (1 - pq^t)^n) dt = -\frac{1}{\ln q} \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du = -\frac{1}{\ln q} \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n-1} u^\ell du = -\frac{1}{\ln q} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell+1}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln q}}$$

3.(c) Au cours de la question 3.(a), on a établi pour a et n entiers

$$\mathbb{E}(R_n) \leq \sum_{k=1}^a \mathbb{P}(k \in \{X_1, \dots, X_n\}) + n\mathbb{P}(X_1 \geq a+1) \leq a + n\mathbb{P}(X_1 \geq a+1)$$

Avec $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et le résultat de la question 2, on obtient

$$\mathbb{E}(R_n) \leq \sqrt{n} + no\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O(\sqrt{n})$$

On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(R_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)}$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note

$$\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall v \in A \quad u \circ v = v \circ u\}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. On suppose f nilpotent d'indice n . Montrer $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.
3. Soient G_1, G_2 sev supplémentaires stable par f . On note $f_i = f_{G_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$ et $\mathcal{B}(f_i) = \mathbb{K}[f_i]$ pour $i \in \{1, 2\}$. Montrer $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Corrigé : 1. On a clairement $\text{id} \in \mathcal{B}(f)$. Soient $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{B}(f)^2$ et soit $w \in \mathcal{C}(\{f\})$. On a

$$u \circ w = w \circ u \quad \text{et} \quad v \circ w = w \circ v$$

d'où

$$(\lambda u + v) \circ w = w \circ (\lambda u + v)$$

$$\text{et} \quad (u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) = u \circ (w \circ v) = (u \circ w) \circ v = (w \circ u) \circ v = w \circ (u \circ v)$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}(f)$ est sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Pour $u \in \mathcal{B}(f)$, on a $u \circ f = f \circ u$ puisque $f \in \mathcal{C}(\{f\})$ d'où $f \in \mathcal{B}(f)$. Du fait de la structure d'algèbre de $\mathcal{B}(f)$, on vérifie par récurrence $f^k \in \mathcal{B}(f)$ pour k entier puis $P(f) \in \mathcal{B}(f)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. On conclut

$$\boxed{\text{Le bicommutant } \mathcal{B}(f) \text{ est une } \mathbb{K}\text{-algèbre contenant } \mathbb{K}[f].}$$

2. On a $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ et $\mathcal{B} = (x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$. Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ famille de scalaires non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0_E$. On note $\ell = \min \{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_i \neq 0\}$. On obtient

$$f^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) \right) = \alpha_\ell f^{n-1}(x_0) = 0_E$$

d'où $\alpha_\ell = 0$ ce qui est absurde. On en déduit la liberté de la famille $\mathcal{B}$ qui est de cardinal n et forme donc une base de E . Soit $u \in \mathcal{C}(\{f\})$. On note $u(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ avec les a_k coordonnées de $u(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $f^i \in \mathcal{B}(f)$ d'où

$$u(f^i(x_0)) = (u \circ f^i)(x_0) = (f^i \circ u)(x_0) = f^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^i(x_0))$$

ce qui prouve que u et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur $\mathcal{B}$ et sont donc égaux. Ceci prouve $\mathcal{C}(\{f\}) \subset \mathbb{K}[f]$ et l'autre inclusion est immédiate d'où $\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$. Étant donnés A, B inclus dans $\mathcal{L}(E)$, on vérifie sans difficulté

$$A \subset B \implies \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$$

Comme on $\{f\} \subset \mathbb{K}[f]$, il en résulte

$$\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathbb{K}[f]) \subset \mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$$

L'autre inclusion ayant été établie à la question précédente, on conclut

$$\boxed{\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

3. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de G_1 et G_2 . On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \uplus \mathcal{B}_2$ base de E telle que $M = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ avec r l'ordre de A . On observe

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Notant $J_r = \text{diag}(I_r, 0)$, on a donc $\{J_r\} \subset \mathcal{C}(\{M\})$ d'où $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{C}(\{J_r\})$. Pour une matrice écrite par blocs $\left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline U & V \end{array} \right)$, il vient

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline U & V \end{array} \right) \in \mathcal{C}(\{J_r\}) &\iff \left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline U & V \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline U & V \end{array} \right) \\ &\iff \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline U & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} S & T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \iff U = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \end{aligned}$$

Ainsi
$$\mathcal{C}(\{J_r\}) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & V \end{array} \right), (U, V) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \right\}$$

autrement dit, les matrices de $\mathcal{B}(M)$ sont nécessairement diagonales par blocs. Soient $A' \in \mathcal{C}(\{A\})$ et $B' \in \mathcal{C}(\{B\})$. On a

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A'A & 0 \\ \hline 0 & B'B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right)$$

d'où
$$\forall (A', B') \in \mathcal{C}(\{A\}) \times \mathcal{C}(\{B\}) \quad \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) \in \mathcal{C}(\{M\})$$

Soit $\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) \in \mathcal{B}(M)$. On a donc pour $A' \in \mathcal{C}(\{A\})$ et $B' \in \mathcal{C}(\{B\})$

$$\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right)$$

d'où
$$XA' = AX' \quad \text{et} \quad YB' = B'Y$$

ce qui prouve $X \in \mathcal{B}(A)$ et $Y \in \mathcal{B}(B)$. Or, on a supposé $\mathcal{B}(A) = \mathbb{K}[A]$ et $\mathcal{B}(B) = \mathbb{K}[B]$ d'où

$$\mathcal{B}(M) \subset \left\{ \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline 0 & Q(B) \end{array} \right), (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \right\} \quad (*)$$

On a $\pi_A \wedge \pi_B = 1$. D'après le théorème de Bezout, on dispose de U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $\pi_A U + \pi_B V = 1$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On pose

$$R = P\pi_B V + Q\pi_A U$$

Ainsi, il vient

$$R(A) = P(A)(I_n - \pi_A(A)U(A)) = P(A) \quad \text{et} \quad R(B) = Q(B)(I_n - \pi_B(B)V(B)) = Q(B)$$

On en déduit
$$\left\{ \left(\frac{P(A)}{0} \middle| \frac{0}{Q(B)} \right), (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \right\} \subset \mathbb{K}[M]$$

Et on conclut

$$\boxed{\mathcal{B}(M) = \mathbb{K}[M]}$$

Remarque : On peut passer par un argument dimensionnel. De l'inclusion $(*)$, il vient

$$\dim \mathcal{B}(M) \leq \dim \mathbb{K}[A] \times \mathbb{K}[B] = \deg \pi_A + \deg \pi_B$$

Or, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(M) = 0 \iff P(A) = 0 \quad \text{et} \quad P(B) = 0$$

d'où, les polynômes π_A et π_B étant premiers entre eux

$$\pi_M \mathbb{K}[X] = \pi_A \mathbb{K}[X] \cap \pi_B \mathbb{K}[X] = (\pi_A \vee \pi_B) \mathbb{K}[X] = (\pi_A \pi_B) \mathbb{K}[X]$$

ce qui prouve $\pi_M = \pi_A \pi_B$ (polynômes unitaires associés). On en déduit $\dim \mathcal{B}(M) \leq \dim \mathbb{K}[M]$ et le résultat suit.

Exercice 8 (Centrale 2023)

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) dt$ pour n entier non nul et $a_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence R est ≥ 1 .
2. On note S sa somme sur $] -R; R[$. Calculer $S(x)$ pour $x \in] -1; 1[$ puis établir $R = 1$.
3. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) dt \leq \frac{(n-1)!}{n!} \int_0^1 t dt$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a_n| \leq \frac{1}{2n}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1 et par conséquent

$$\boxed{R \geq 1}$$

2. On pose
$$\forall x \in] -R; R[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Soit $t \in [0; 1]$. On a le développement usuel

$$\forall x \in] -1; 1[\quad (1+x)^t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n$$

Soit $x \in] -1; 1[$. On pose (avec la convention qu'un produit vide est égal à 1) :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad u_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t - k) x^n$$

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\|_\infty \leq |x|^n$

Par conséquent, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0; 1]$. Il s'ensuit

$$\int_0^{1+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$$

d'où $\int_0^1 (1+x)^t dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Ainsi $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\} \quad S(x) = \left[\frac{e^{t \ln(1+x)}}{\ln(1+x)} \right]_0^1$

D'où $\forall x \in]-1; 1[\quad S(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Supposons $R > 1$. La somme S est alors continue sur $[-1; 1]$ mais $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{R = 1}$$

3. Soit n entier ≥ 2 . On a

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{n} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 t \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right)\right) dt \end{aligned}$$

Avec l'approximation $\ln(1-u) \simeq u$ pour u au voisinage de 0, on peut envisager d'avoir l'approximation

$$|a_n| \simeq \frac{1}{n} \int_0^1 t \exp(-t H_{n-1}) dt \quad \text{avec} \quad H_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

et on pourrait donc en déduire

$$|a_n| \simeq \frac{1}{n} \int_0^1 t \exp(-t \ln n) dt \underset{u=t \ln n}{\simeq} \frac{1}{n(\ln n)^2} \int_0^{\ln n} u e^{-u} du \simeq \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Rendons ce raisonnement rigoureux. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et par convexité, on a

$$\forall u \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad -2u^2 \leq \ln(1-u) + u \leq 0$$

On a va sortir le terme en $k = 1$ du produit dans l'écriture intégrale de $|a_n|$ pour exploiter cette inégalité. On écrit

$$\begin{aligned} n |a_n| &= \int_0^1 t(1-t) \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right) dt \\ &= \int_0^1 t(1-t) \exp\left(\sum_{k=2}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right)\right) dt \\ &= \int_0^1 t(1-t) \exp(v_n(t)) e^{-th_n} dt \end{aligned}$$

avec $\forall t \in [0; 1] \quad v_n(t) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{t}{k} \right) + \frac{t}{k} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$

Ainsi $\forall t \in [0; 1] \quad -2t^2 S_n \leq v_n(t) \leq 0 \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2} = O(1)$

On effectue le changement de variable $u = th_n$ et on obtient

$$h_n^2 n |a_n| = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

avec $\forall n \geq 2 \forall u \geq 0 \quad f_n(u) = \begin{cases} u \left(1 - \frac{u}{h_n} \right) \exp \left(v_n \left(\frac{u}{h_n} \right) \right) e^{-u} & \text{si } u \in [0; h_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par comparaison série/intégrale, on trouve $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$. Soit $u \geq 0$. Pour $n \geq 2$ tel que $h_n \geq u$, on a

$$-\frac{2u^2}{h_n^2} S_n \leq v_n \left(\frac{u}{h_n} \right) \leq 0 \quad \text{d'où} \quad v_n \left(\frac{u}{h_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Ainsi $\forall u \geq 0 \quad f_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad 0 \leq f_n(u) \leq u e^{-u}$

Par intégration par parties (crochet fini nul qui garantit que les intégrales concernées sont de même nature donc convergentes), on obtient

$$\int_0^{+\infty} u e^{-u} du = [-u e^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$$

Par convergence dominée, on obtient alors

$$h_n^2 n |a_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Et on conclut

$$\boxed{a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln n)^2}}$$