1 Suite définie par une intégrale *(Mines Telecom)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)^n}$.

1. Justifier la définition de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.
2. Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?
4. La série $\sum (-1)^n u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

---

2 Inégalité et matrice orthogonale *(Mines Telecom)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.
2. Montrer que $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

---

1 Suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}(x)^n}$.

1. **Justifier la définition de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.**
   La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(x)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{1}{\text{ch}(x)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{e^{nx}}$, intégrable.
   Donc $\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^\star}$.
2. **Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.**
   Pour tout $x > 0$, on a $\text{ch}(x) \in]1, +\infty[$, donc $\dfrac{1}{\text{ch}(x)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence simple vers 0.
   De plus, $\forall x \in [0, +\infty[$, $\dfrac{1}{\text{ch}(x)^n} \leqslant \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$, intégrale et indépendante de n.
   Par théorème de convergence dominée, $\boxed{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0}$.
3. **La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\text{ch}(x) \leqslant e^x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
   $$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}(x)^n} \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{nx}} \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{e^y},$$
   en posant $y = nx$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge vers } +\infty}$.
4. **La série $\sum(-1)^n u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?**
   Comme (u_n) est décroissante de limite nulle, par critère des séries alternées, $\boxed{\sum(-1)^n u_n \text{ converge}}$.
   Pour le calcul de la somme, on cherche à intervertir somme et intégrale.
   Pour cela, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sum(-1)^n f_n(x) = \sum \dfrac{(-1)^n}{\text{ch}(x)^n}$ vérifie le critère des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{\text{ch}(x)^n}\right)$ est décroissante de limite nulle. Donc la série converge simplement, et sa somme (géométrique) vaut :
   $$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\text{ch}(x)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\text{ch}(x)}\right)^k = -\frac{1}{1+\text{ch}(x)}.$$
   De plus, S est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $S(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{e^x}$, et on a, par critère des séries alternées :
   $$\left|\int_0^{+\infty} S(x)dx - \int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\text{ch}(x)}dx\right| \leqslant \left|\int_0^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\text{ch}(x)^k}dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(x)^{n+1}}dx \leqslant u_{n+1}.$$
   Or on a montré que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\text{ch}(x)}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} S(x)dx$. On calcule cette intégrale :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\text{ch}(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}dx = \left[-\frac{2}{e^x+1}\right]_0^{+\infty} = 1.$$
   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k u_k = -1}$.

$\boxed{2}$ Inégalité et matrice orthogonale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. **Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.**

   A est orthogonale donc ses colonnes forment une bon de $\mathbb{R}^n$.

   Ainsi, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} ||C_j||^2 = \sum_{j=1}^{n} 1 = \boxed{n}$.

2. **Montrer que $\displaystyle n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.**

   Comme chaque colonne est de norme 1, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$, donc $a_{i,j}^2 \leqslant |a_{i,j}|$.
   En sommant : $\displaystyle n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.
   De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appliqué à $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et à la matrice J constituée uniquement de 1 :

   $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \times 1 \leqslant \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1} = \sqrt{n \times n^2}.$$

   Donc $\boxed{\displaystyle n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}}$.

---

3 **Loi du minimum** *(CCINP)*
Soit $N \in \mathbb{N}^\star$.
Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)),$$
   min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

---

4 **Polynômes** *(Mines Ponts)*
Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

---

1 Loi du minimum

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. **Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.**
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
   Comme X_i suit une loi géométrique, $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $P(X_i = k) = q^{k-1}p$. Donc :
   $$P(X_i \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \times \frac{1-q^n}{1-q} = \boxed{1-q^n}.$$
   Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n)$, soit $\boxed{P(X_i > n) = q^n}$.
2. **On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire :**
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)),$$
   min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) **Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.**
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y > n \iff (\forall i \in [\![1, N]\!],\ X_i > n)$. Comme les variables sont indépendantes :
   $$P(Y > n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N}(X_i > n)\right) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n) = (q^n)^N = \boxed{q^{nN}}.$$
   Donc $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$, soit $\boxed{P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}}$.
   Enfin, $P(Y = 1) = P(Y \leqslant 1) = 1 - q^N$, et pour tout $n \geqslant 2$:
   $$P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) = 1 - q^{nN} - (1 - q^{(n-1)N}) = \boxed{q^{(n-1)N}(1-q^N)}.$$
   (b) **Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.**
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1-q^N) = (1-(1-q^N))^{n-1}(1-q^N)$, donc Y suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^N$. Donc : $\boxed{E(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}}$.

---

2 Polynômes

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

Soit $P = a_0 + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ qui laisse stable $\mathbb{U}$.
On pose $\widetilde{P} = \overline{a_0}X^n + \overline{a_1}X^{n-1} + \dots + \overline{a_n} = X^n\overline{P}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
Pour tout $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$, donc $\widetilde{P}(u) = u^n\overline{P}(\overline{u}) = u^n\overline{P(u)}$.
Or P laisse stable $\mathbb{U}$, donc $P(u)\widetilde{P}(u) = u^n|P(u)|^2 = u^n$.
Ainsi, le polynôme $P\widetilde{P} - X^n$ s'annule une infinité de fois (sur $\mathbb{U}$), et est donc nul.
Donc $P\widetilde{P} = X^n$, avec $\deg(P) = n$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ tel que $P = \lambda X^n$, et $\widetilde{P} = \dfrac{1}{\lambda}$.
Or $|P(1)| = |\lambda| = 1$ car $1 \in \mathbb{U}$. Donc $\lambda \in \mathbb{U}$.
Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P = \lambda X^n$, alors P laisse stable $\mathbb{U}$.
Finalement $\boxed{(P \in \mathbb{C}[X] \text{ laisse stable } \mathbb{U}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{U}, \exists n \in \mathbb{N},\quad P = \lambda X^n)}$.

---

1 Équation endomorphisme *(CCINP)*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

---

2 Produit scalaire intégrales *(CCINP)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

---

1 Équation endomorphisme

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. **Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.**
   - Méthode 1 : on raisonne par analyse synthèse. Soit $x \in E$.
     - ⋆ On suppose qu'il existe $(y, z) \in \mathrm{Im}(u) \times \ker(u)$ tel que $x = y + z$.
       On a $y \in \mathrm{Im}(u)$, donc il existe $t \in E$ tel que $y = u(t)$. On a alors $x = u(t) + z$.
       De plus, $z \in \ker(u)$, donc $u(x) = u^2(t) + u(z) = u^2(t)$. Puis $u^2(x) = u^3(t)$.
       Donc : $x + u(x) + u^2(x) = z + \underbrace{u(t) + u^2(t) + u^3(t)}_{=0} = z$.
       Puis $y = x - z = -u(x) - u^2(x)$. D'où l'unicité.
     - ⋆ On pose $y = -u(x) - u^2(x)$ et $z = x + u(x) + u^2(x)$.
       Alors $y + z = x$, et $y = u(-x - u(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}(u)$.
       De plus, $u(z) = u(x) + u^2(x) + u^3(x) = 0$, donc $z \in \ker(u)$. D'où l'existence.

     On a donc bien $\boxed{\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E}$.
   - Méthode 2 : on utilise la dimension finie.
     Soit $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$, et on a $u(x) = 0$.
     De plus, $x + u(x) + u^2(x) = u(t) + u^2(t) + u^3(t) = 0$. Donc $x = -u(x) - u^2(x) = 0$.
     Donc $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
     De plus, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E}$.
2. (a) **Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.**
   Si P et Q sont premiers entre eux, alors $\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

   (b) **En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.**
   Posons $P = X(X^2 + X + 1)$. On sait que X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux, donc d'après le lemme des noyaux :
   $$\ker(u) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \ker(u^3 + u^2 + u) = E.$$
   Donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2 + u + \mathrm{Id}))$.
   Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   Donc $(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = 0$, donc $y \in \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
   On a donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})}$.
3. **On suppose que u est non bijectif.**
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.
   Soit λ une valeur propre de u, et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   Alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x) = \lambda^n(x)$.
   Donc : $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$, avec $x \neq 0$, donc $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
   On a donc $\lambda \in \{0, j, j^2\} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.
   De plus, u n'est pas bijectif, donc 0 est valeur propre. Donc $\boxed{\text{la seule valeur propre est } 0}$.

---

2 Produit scalaire intégrales

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) **Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   Montrons que pour tout $(x, y) \in E^2$, $|(x|y)| \leqslant ||x||||y||$.
   Posons $P : \lambda \mapsto ||\lambda x + y||^2$. Alors P est positive sur $\mathbb{R}$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:
   $$P(\lambda) = \lambda^2||x||^2 + 2\lambda(x|y) + ||y||^2.$$
   - Si $x = 0$, alors $|(x|y)| = ||x||||y|| = 0$.

- Si $x \neq 0$, alors $||x|| \neq 0$, et P est un trinôme positive. Donc son discriminant est négatif :

$$4(x|y)^2 - 4||x||^2||y||^2 \leqslant 0, \quad \text{donc} \quad |(x|y)| \leqslant ||x||||y||.$$

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{|(x|y)| \leqslant ||x||||y||}$.

(b) **Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.**
Montrons qu'il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Si $x = 0$, il y a égalité et les vecteurs sont colinéaires.
- Si $x \neq 0$, il y a égalité si et seulement si P admet une racine double : il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$, ie :

$$||\lambda_0 x + y||^2 \iff \lambda_0 x + y = 0 \iff y = -\lambda_0 x,$$

vrai si et seulement si x et y sont colinéaires.

2. **Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$.**
Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m. On utilise le produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in E$, d'après la formule de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} = ||\sqrt{f}||^2 \left|\left|\frac{1}{\sqrt{f}}\right|\right|^2 \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt\right)^2 \geqslant (b-a)^2.$$

Donc l'ensemble $A = \left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ est minoré par $(b-a)^2$, et est non vide, car pour f constante égale à 1, on a $f \in E$, et $\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} = (b-a)^2$.
Donc A admet une borne inférieure m, qui est atteinte, et $\boxed{m = (b-a)^2}$.

$\boxed{1}$ Lois géométriques indépendantes *(CCINP)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs λ et μ avec $(\lambda, \mu) \in \,]0,1[^2$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Si X et Y sont deux variables aléatoires quelconques indépendantes, $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

$\boxed{2}$ Endomorphisme de matrices *(CCINP)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

---

1 Lois géométriques indépendantes

1. **Déterminer la loi de $X+Y$.**
Comme X et Y sont géométriques, l'univers image de $X+Y$ est $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour tout $n \geqslant 2$:

$$P(X+Y=n)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k, Y=n-k)=\sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)P(Y=n-k),$$

par indépendance et car $Y(\Omega)=\mathbb{N}^\star$. Donc :

$$P(X+Y=n)=\lambda\mu\sum_{k=1}^{n-1}(1-\lambda)^{k-1}(1-\mu)^{n-k-1}=\lambda\mu\frac{(1-\mu)^{n-1}}{1-\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\right)^k.$$

En utilisant la formule d'une somme géométrique :

$$P(X+Y=n)=\lambda\mu\frac{(1-\mu)^{n-1}}{1-\lambda}\times\frac{1-\lambda}{1-\mu}\times\frac{1-\left(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-\lambda}{1-\mu}}.$$

Après simplification :

$$\boxed{P(X+Y=n)=\lambda\mu\frac{(1-\mu)^{n-1}-(1-\lambda)^{n-1}}{\lambda-\mu}.}$$

2. **Si X et Y sont deux variables aléatoires quelconques indépendantes, $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?**
Non. On peut par exemple remarquer que $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)=V(X)-V(Y)$, donc si X et Y n'ont pas la même variance, $X+Y$ et $X-Y$ ne peuvent pas être indépendantes.

---

2 Endomorphisme de matrices

1. **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).**
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $P(u)=0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de u.
Alors il existe $x\in E$ non nul tel que $u(x)=\lambda x$. Par récurrence, on obtient que $\forall k\in\mathbb{N}$, $u^k(x)=\lambda^k x$.
Donc :
$$P(u)(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k x=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k\right)x=P(\lambda)x.$$
Donc $P(\lambda)x=0_E$, avec $x\neq 0_E$. Donc $P(\lambda)=0$, donc $\boxed{\lambda \text{ est racine de } P}$.

2. **Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ 1 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M\in E,\ u(M)=M+\mathrm{tr}(M)A$.
   (a) **Prouver que le polynôme X^2-2X+1 est annulateur de u.**
   On a, pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $u^2(M)=u(M+\mathrm{tr}(M)A)=u(M)+\mathrm{tr}(M)u(A)$.
   Or $\mathrm{tr}(A)=0$, donc $u(A)=A$, et $u^2(M)=u(M)+\mathrm{tr}(M)A$. Ainsi :
   $$\begin{aligned}(u^2-2u+\mathrm{Id}_E)(M) &= u(M)+\mathrm{tr}(M)A-2u(M)+M\\ &= M+\mathrm{tr}(M)A-u(M)\ =\ 0.\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{u^2-2u+\mathrm{Id}_E=0}$.

(b) **u est-il diagonalisable ?**
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

- Méthode 1 : d'après la question 1, toute valeur propre de u est racine de $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Donc u admet pour seule valeur propre 1. Si u était diagonalisable, on aurait $u = \mathrm{Id}_E$, absurde car par exemple $u(I_n) = I_n + nA \neq 0_n$.
Donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
- Méthode 2 : soit P_m le polynôme minimal de u. Alors P_m divise $(X-1)^2$.
Si u était diagonalisable, alors P_m serait scindé à racines simples. Donc on aurait $P_m = X - 1$, et donc $u = \mathrm{Id}_E$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

---

1 Loi du minimum *(CCINP)*

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_N(\omega)),$$
   min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

---

2 Suite de fonctions *(CCINP)*

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

---

1 Loi du minimum

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. **Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.**
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
   Comme X_i suit une loi géométrique, $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $P(X_i = k) = q^{k-1}p$. Donc :
   $$P(X_i \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \times \frac{1-q^n}{1-q} = \boxed{1-q^n}.$$
   Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n)$, soit $\boxed{P(X_i > n) = q^n}$.
2. **On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$, c'est-à-dire :**
   $$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)),$$
   min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) **Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.**
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y > n \iff (\forall i \in [\![1,N]\!],\ X_i > n)$. Comme les variables sont indépendantes :
   $$P(Y > n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N}(X_i > n)\right) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n) = (q^n)^N = \boxed{q^{nN}}.$$
   Donc $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$, soit $\boxed{P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}}$.
   Enfin, $P(Y = 1) = P(Y \leqslant 1) = 1 - q^N$, et pour tout $n \geqslant 2$:
   $$P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) = 1 - q^{nN} - (1 - q^{(n-1)N}) = \boxed{q^{(n-1)N}(1-q^N)}.$$
   (b) **Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.**
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1-q^N) = (1-(1-q^N))^{n-1}(1-q^N)$, donc Y suit la loi géométrique de paramètre $1-q^N$. Donc : $\boxed{E(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}}$.

---

2 Suite de fonctions

1. **Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.**
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
   On raisonne par l'absurde : supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.
   Alors $||f_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, donc $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant ||f_n - f||_\infty$.
   Par théorème des gendarmes, on aurait $f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, absurde.
   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } X}$.
2. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.**
   (a) **Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Si $x \neq 0$, alors $(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi, $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction nulle}}$.

(b) **Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.**

- Soit $a>0$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in[a,+\infty[$:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

  Cette majoration est indépendante de x, et $\dfrac{1}{1+n^2a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [a,+\infty[}$.

- Posons $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. Alors $x_n \in]0,+\infty[$, et $\forall n\in\mathbb{N}^\star$:

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2n}\right)}{1+n^2\times\frac{\pi^2}{4n^2}}\right| = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}.$$

  Ainsi, $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

  D'après la question 1, $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur }]0,+\infty}$.

1 Bijectivité en dimension infinie *(CCINP)*

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.
   Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

---

2 Séries de Bertrand *(CCINP)*

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas $\alpha > 0$**
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2 + n)\right)^2}$.

---

1 Bijectivité en dimension infinie

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. **Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ et $x \in E$ non nul tel que $u \circ v(x) = \lambda x$.
Alors : $v \circ u(v(x)) = \lambda v(x)$.
De plus, $v(x) \neq 0_E$ car sinon on aurait $\lambda x = 0$, avec $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$, ce qui est absurde.
Donc $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } v \circ u}$.

2. **On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.**
Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
Les applications u et v sont bien linéaires par linéarité de l'intégrale et de la dérivation.
   - Soit $P \in \ker(u \circ v)$. Alors $\displaystyle\int_1^X P' = 0$, donc $P = P(1)$, donc P est constant.
   Réciproquement, tout polynôme constant vérifie $v(P) = 0$, donc $P \in \ker(u \circ v)$.
   Ainsi, $\boxed{\ker(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]}$.
   - Soit $P \in \ker(v \circ u)$. Alors $v \circ u(P) = 0$.
   Posons $Q = u(P) = \displaystyle\int_1^X P$. Alors Q est l'unique primitive de P qui s'annule en 1. Donc $v(Q) = Q' = P$.
   Ainsi $v \circ u(P) = P$, donc $P = 0$. Ainsi $\boxed{\ker(v \circ u) = \{0\}}$.

   Dans cet exemple, 0 est valeur propre de $u \circ v$, mais pas de $v \circ u$: $\boxed{\text{le résultat n'est plus valable}}$.

3. **Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. Indication : penser à utiliser le déterminant.**
Supposons que E est de dimension finie, et que 0 est valeur propre de $u \circ v$.
Alors $u \circ v$ n'est pas bijective, donc $\det(u \circ v) = 0$.
Or $\det(v \circ u) = \det(u \circ v)$, donc $\det(v \circ u) = 0$, donc $v \circ u$ n'est pas bijective.
Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } v \circ u}$.

---

2 Séries de Bertrand

1. **On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.**
   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   Dans ce cas, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc comme $\alpha \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{(\ln(2)^\alpha} \times \dfrac{1}{n}$.
   Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.
   (b) **Cas $\alpha > 0$**
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Donc par comparaison série intégrale, $\sum\limits_{n \geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
   Or en posant $u = \ln(t)$, on a $du = \dfrac{dt}{t}$ donc par théorème de changement de variable :
$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\alpha}.$$

Ainsi $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

2. **Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.**

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} e-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= e-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} e-\exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} e-\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} e-e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

De plus : $\ln(n^2+n) = \ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$.

On a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \times \frac{1}{(2\ln(n))^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8n\ln(n)^2}$.

D'après 1, comme $2 > 1$, $\boxed{\text{la série converge}}$.

1 Série entière *(CCINP)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

---

2 Projection orthogonale *(CCINP)*

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A,A')=\mathrm{tr}(A^\top A')$, où $\mathrm{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur F.
4. Calculer la distance de J à F.

Oral blanc jeudi 30 mai 2024 (15h) – Correction

1 Série entière

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
   Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \geqslant 0,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

2. **Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.**
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
   Pour $z = 1$, $\sum a_n z^n$ diverge, donc son rayon vérifie $R \leqslant 1$.
   De plus, la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $R \geqslant 1$. Ainsi $\boxed{R = 1}$.

3. **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?**
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   Cette suite est positive, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$, car $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Or $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, avec $\sum \dfrac{1}{n}$ qui diverge.
   Donc $\sum a_n$ diverge.
   D'après la question précédente, $\boxed{\text{le rayon de convergence vaut } 1}$.

---

2 Projection orthogonale

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}(A^\top A')$, où $\operatorname{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **Montrer que F est un espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
   On a $F = \operatorname{Vect}(I_3, A)$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{F \text{ est un sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. **Déterminer une base de $F^\perp$.**
   Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $B \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(I_3, B) = 0$ et $\varphi(A, B) = 0$. Or :

$$\begin{cases} \varphi(I_3, B) = 0 \\ \varphi(A, B) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(I_3^\top B) = 0 \\ \operatorname{tr}(A^\top B) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ -c + b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} d = -a \\ c = b. \end{cases}$$

   Donc $\boxed{F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(C, D)}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (C, D) est libre, donc c'est une base de $F^\perp$.

3. **Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F.**
   On a $J = I_3 + D$, avec $I_3 \in F$ et $D \in F^\perp$, donc $\boxed{\text{le projeté est } I_3}$.

4. **Calculer la distance de J à F.**
   On a : $||J - I_3||^2 = \operatorname{tr}((J - I_3)^\top (J - I_3)) = \operatorname{tr}(I_3) = 2$, donc $\boxed{d(J, F) = \sqrt{2}}$.

---

1 Équation endomorphisme *(CCINP)*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

---

2 Produit scalaire intégrales *(CCINP)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

---

1 Équation endomorphisme

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.

1. **Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.**
   - Méthode 1 : on raisonne par analyse synthèse. Soit $x \in E$.
     - ⋆ On suppose qu'il existe $(y, z) \in \mathrm{Im}(u) \times \ker(u)$ tel que $x = y + z$.
       On a $y \in \mathrm{Im}(u)$, donc il existe $t \in E$ tel que $y = u(t)$. On a alors $x = u(t) + z$.
       De plus, $z \in \ker(u)$, donc $u(x) = u^2(t) + u(z) = u^2(t)$. Puis $u^2(x) = u^3(t)$.
       Donc : $x + u(x) + u^2(x) = z + \underbrace{u(t) + u^2(t) + u^3(t)}_{=0} = z$.
       Puis $y = x - z = -u(x) - u^2(x)$. D'où l'unicité.
     - ⋆ On pose $y = -u(x) - u^2(x)$ et $z = x + u(x) + u^2(x)$.
       Alors $y + z = x$, et $y = u(-x - u(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}(u)$.
       De plus, $u(z) = u(x) + u^2(x) + u^3(x) = 0$, donc $z \in \ker(u)$. D'où l'existence.

     On a donc bien $\boxed{\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E}$.
   - Méthode 2 : on utilise la dimension finie.
     Soit $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$, et on a $u(x) = 0$.
     De plus, $x + u(x) + u^2(x) = u(t) + u^2(t) + u^3(t) = 0$. Donc $x = -u(x) - u^2(x) = 0$.
     Donc $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
     De plus, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E}$.

2. (a) **Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.**
   Si P et Q sont premiers entre eux, alors $\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

   (b) **En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.**
   Posons $P = X(X^2 + X + 1)$. On sait que X et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux, donc d'après le lemme des noyaux :
   $$\ker(u) \oplus \ker(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \ker(u^3 + u^2 + u) = E.$$
   Donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2 + u + \mathrm{Id}))$.
   Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   Donc $(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = 0$, donc $y \in \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
   On a donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})}$.

3. **On suppose que u est non bijectif.**
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.
   Soit λ une valeur propre de u, et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   Alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x) = \lambda^n(x)$.
   Donc : $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$, avec $x \neq 0$, donc $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.
   On a donc $\lambda \in \{0, j, j^2\} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.
   De plus, u n'est pas bijectif, donc 0 est valeur propre. Donc $\boxed{\text{la seule valeur propre est } 0}$.

---

2 Produit scalaire intégrales

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) **Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   Montrons que pour tout $(x, y) \in E^2$, $|(x|y)| \leqslant ||x|| ||y||$.
   Posons $P : \lambda \mapsto ||\lambda x + y||^2$. Alors P est positive sur $\mathbb{R}$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:
   $$P(\lambda) = \lambda^2 ||x||^2 + 2\lambda(x|y) + ||y||^2.$$
   - Si $x = 0$, alors $|(x|y)| = ||x|| ||y|| = 0$.

- Si $x \neq 0$, alors $||x|| \neq 0$, et P est un trinôme positive. Donc son discriminant est négatif :

$$4(x|y)^2 - 4||x||^2||y||^2 \leqslant 0, \quad \text{donc} \quad |(x|y)| \leqslant ||x||||y||.$$

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{|(x|y)| \leqslant ||x||||y||}$.

(b) **Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.**
Montrons qu'il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Si $x = 0$, il y a égalité et les vecteurs sont colinéaires.
- Si $x \neq 0$, il y a égalité si et seulement si P admet une racine double : il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$, ie :

$$||\lambda_0 x + y||^2 \iff \lambda_0 x + y = 0 \iff y = -\lambda_0 x,$$

vrai si et seulement si x et y sont colinéaires.

2. **Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$.**
Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m. On utilise le produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors pour tout $f \in E$, d'après la formule de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} = ||\sqrt{f}||^2 \left|\left|\frac{1}{\sqrt{f}}\right|\right|^2 \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2 \geqslant (b-a)^2.$$

Donc l'ensemble $A = \left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$ est minoré par $(b-a)^2$, et est non vide, car pour f constante égale à 1, on a $f \in E$, et $\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} = (b-a)^2$.
Donc A admet une borne inférieure m, qui est atteinte, et $\boxed{m = (b-a)^2}$.

1 Bijectivité en dimension infinie *(CCINP)*

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.
   Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

---

2 Séries de Bertrand *(CCINP)*

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas $\alpha > 0$**
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

---

1 Bijectivité en dimension infinie

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. **Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.**
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ et $x \in E$ non nul tel que $u \circ v(x) = \lambda x$.
   Alors : $v \circ u(v(x)) = \lambda v(x)$.
   De plus, $v(x) \neq 0_E$ car sinon on aurait $\lambda x = 0$, avec $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$, ce qui est absurde.
   Donc $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } v \circ u}$.

2. **On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.**
   Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
   Les applications u et v sont bien linéaires par linéarité de l'intégrale et de la dérivation.

   - Soit $P \in \ker(u \circ v)$. Alors $\displaystyle\int_1^X P' = 0$, donc $P = P(1)$, donc P est constant.
     Réciproquement, tout polynôme constant vérifie $v(P) = 0$, donc $P \in \ker(u \circ v)$.
     Ainsi, $\boxed{\ker(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]}$.
   - Soit $P \in \ker(v \circ u)$. Alors $v \circ u(P) = 0$.
     Posons $Q = u(P) = \displaystyle\int_1^X P$. Alors Q est l'unique primitive de P qui s'annule en 1. Donc $v(Q) = Q' = P$.
     Ainsi $v \circ u(P) = P$, donc $P = 0$. Ainsi $\boxed{\ker(v \circ u) = \{0\}}$.

   Dans cet exemple, 0 est valeur propre de $u \circ v$, mais pas de $v \circ u$: $\boxed{\text{le résultat n'est plus valable}}$.

3. **Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$. Indication : penser à utiliser le déterminant.**
   Supposons que E est de dimension finie, et que 0 est valeur propre de $u \circ v$.
   Alors $u \circ v$ n'est pas bijective, donc $\det(u \circ v) = 0$.
   Or $\det(v \circ u) = \det(u \circ v)$, donc $\det(v \circ u) = 0$, donc $v \circ u$ n'est pas bijective.
   Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } v \circ u}$.

---

2 Séries de Bertrand

1. **On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.**

   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   Dans ce cas, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n) \geqslant \ln(2)$, donc comme $\alpha \leqslant 0$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{(\ln(2)^\alpha} \times \dfrac{1}{n}$.
   Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

   (b) **Cas $\alpha > 0$**
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Donc par comparaison série intégrale, $\sum_{n \geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
   Or en posant $u = \ln(t)$, on a $du = \dfrac{dt}{t}$ donc par théorème de changement de variable :

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\alpha}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

2. **Déterminer la nature de la série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

   On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
e - \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n &= e - \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{=} e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}
\end{aligned}$$

   De plus : $\ln(n^2+n) = \ln(n^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$.

   On a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{2n} \times \dfrac{1}{(2\ln(n))^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{8n\ln(n)^2}$.

   D'après 1, comme $2 > 1$, $\boxed{\text{la série converge}}$.

---

1 Suite de fonctions *(CCINP)*

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

---

2 Inégalité et matrice orthogonale *(Mines Telecom)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.
2. Montrer que $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

---

1 Suite de fonctions

1. **Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.**
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
   On raisonne par l'absurde : supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.
   Alors $||f_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, donc $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant ||f_n - f||_\infty$.
   Par théorème des gendarmes, on aurait $f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, absurde.
   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } X}$.

2. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.**
   (a) **Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Si $x \neq 0$, alors $(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi, $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction nulle}}$.
   (b) **Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.**
   - Soit $a > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, +\infty[$:
   $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$
   Cette majoration est indépendante de x, et $\dfrac{1}{1+n^2a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [a, +\infty[}$.
   - Posons $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. Alors $x_n \in]0, +\infty[$, et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2n}\right)}{1 + n^2 \times \frac{\pi^2}{4n^2}}\right| = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}.$$
   Ainsi, $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
   D'après la question 1, $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur }]0, +\infty}$.

---

2 Inégalité et matrice orthogonale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. **Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.**
   A est orthogonale donc ses colonnes forment une bon de $\mathbb{R}^n$.
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n ||C_j||^2 = \sum_{j=1}^n 1 = \boxed{n}$.

2. **Montrer que $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.**
   Comme chaque colonne est de norme 1, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$, donc $a_{i,j}^2 \leqslant |a_{i,j}|$.
   En sommant : $n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appliqué à $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et à la matrice J constituée uniquement de 1 :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \times 1 \ \leqslant \ \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1} = \sqrt{n \times n^2}.$$

Donc $\boxed{n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}}$.

Oral blanc jeudi 30 mai 2024 (16h20)

1 Suite définie par une intégrale *(Mines Telecom)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)^n}$.

1. Justifier la définition de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.
2. Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?
4. La série $\sum (-1)^n u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

---

2 Endomorphisme de matrices *(CCINP)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

---

1 Suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)^n}$.

1. **Justifier la définition de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$.**
   La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{e^{nx}}$, intégrable.
   Donc $\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^\star}$.
2. **Montrer la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.**
   Pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{ch}(x) \in \,]1, +\infty[$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence simple vers 0.
   De plus, $\forall x \in [0, +\infty[$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^n} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$, intégrale et indépendante de n.
   Par théorème de convergence dominée, $\boxed{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0}$.
3. **La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(x) \leqslant e^x$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
   $$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)^n} \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{nx}} \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{e^y},$$
   en posant $y = nx$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge vers } +\infty}$.
4. **La série $\sum (-1)^n u_n$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?**
   Comme (u_n) est décroissante de limite nulle, par critère des séries alternées, $\boxed{\sum(-1)^n u_n \text{ converge}}$.
   Pour le calcul de la somme, on cherche à intervertir somme et intégrale.
   Pour cela, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sum (-1)^n f_n(x) = \sum \dfrac{(-1)^n}{\mathrm{ch}(x)^n}$ vérifie le critère des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^n}\right)$ est décroissante de limite nulle. Donc la série converge simplement, et sa somme (géométrique) vaut :
   $$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}(x)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^k = -\frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}.$$
   De plus, S est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $S(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{e^x}$, et on a, par critère des séries alternées :
   $$\left|\int_0^{+\infty} S(x)dx - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}(x)}dx\right| \leqslant \left|\int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}(x)^k}dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^{n+1}}dx \leqslant u_{n+1}.$$
   Or on a montré que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}(x)}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} S(x)dx$. On calcule cette intégrale :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}dx = \left[-\frac{2}{e^x+1}\right]_0^{+\infty} = 1.$$
   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k = -1}$.

---

2 Endomorphisme de matrices

1. **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).**
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
   Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.
   Alors il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Par récurrence, on obtient que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$.
   Donc :
   $$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x.$$
   Donc $P(\lambda)x = 0_E$, avec $x \neq 0_E$. Donc $P(\lambda) = 0$, donc $\boxed{\lambda \text{ est racine de } P}$.
2. **Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) **Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.**
   On a, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $u^2(M) = u(M + \mathrm{tr}(M)A) = u(M) + \mathrm{tr}(M)u(A)$.
   Or $\mathrm{tr}(A) = 0$, donc $u(A) = A$, et $u^2(M) = u(M) + \mathrm{tr}(M)A$. Ainsi :
   $$\begin{aligned}(u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E)(M) &= u(M) + \mathrm{tr}(M)A - 2u(M) + M \\ &= M + \mathrm{tr}(M)A - u(M) \ = \ 0.\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E = 0}$.
   (b) **u est-il diagonalisable ?**
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).
   - Méthode 1 : d'après la question 1, toute valeur propre de u est racine de $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Donc u admet pour seule valeur propre 1. Si u était diagonalisable, on aurait $u = \mathrm{Id}_E$, absurde car par exemple $u(I_n) = I_n + nA \neq 0_n$.
     Donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
   - Méthode 2 : soit P_m le polynôme minimal de u. Alors P_m divise $(X-1)^2$.
     Si u était diagonalisable, alors P_m serait scindé à racines simples. Donc on aurait $P_m = X - 1$, et donc $u = \mathrm{Id}_E$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

---

1 **Série entière** *(CCINP)*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

---

2 **Projection orthogonale** *(CCINP)*

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A,A')=\operatorname{tr}(A^\top A')$, où $\operatorname{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $F^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur F.
4. Calculer la distance de J à F.

Oral blanc jeudi 30 mai 2024 (16h40) – Correction

1 Série entière

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \geqslant 0,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

2. **Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.**
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
Pour $z = 1$, $\sum a_n z^n$ diverge, donc son rayon vérifie $R \leqslant 1$.
De plus, la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $R \geqslant 1$. Ainsi $\boxed{R = 1}$.

3. **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Cette suite est positive, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$, car $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1 + x) \leqslant x$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Or $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, avec $\sum \dfrac{1}{n}$ qui diverge.
Donc $\sum a_n$ diverge.
D'après la question précédente, $\boxed{\text{le rayon de convergence vaut } 1}$.

---

2 Projection orthogonale

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^\top A')$, où $\mathrm{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **Montrer que F est un espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
On a $F = \mathrm{Vect}(I_3, A)$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{F \text{ est un sev de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. **Déterminer une base de $F^\perp$.**
Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $B \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(I_3, B) = 0$ et $\varphi(A, B) = 0$. Or :
$$\begin{cases} \varphi(I_3, B) = 0 \\ \varphi(A, B) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{tr}(I_3^\top B) = 0 \\ \mathrm{tr}(A^\top B) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = 0 \\ -c + b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} d = -a \\ c = b. \end{cases}$$
Donc $\boxed{F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(C, D)}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (C, D) est libre, donc c'est une base de $F^\perp$.

3. **Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F.**
On a $J = I_3 + D$, avec $I_3 \in F$ et $D \in F^\perp$, donc $\boxed{\text{le projeté est } I_3}$.

4. **Calculer la distance de J à F.**
On a : $||J - I_3||^2 = \mathrm{tr}((J - I_3)^\top (J - I_3)) = \mathrm{tr}(I_3) = 2$, donc $\boxed{d(J, F) = \sqrt{2}}$.
