Exercice 1. [CCINP MP 2021]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donner explicitement les valeurs de a, b, c .

- En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 2. [Mines]

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par récurrence par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

Exercice 3. [Mines MP 2021]

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 4. [CCINP MP 2021]

- On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démontrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$

Exercice 5. [CCINP MP 2021]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- Déterminer le rang de a .
- Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 6. [CCINP MP 2021]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n :: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
- La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, +\infty[$.
- La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$?