Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit E euclidien et (u, v) une famille libre de vecteurs de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$$

1. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Déterminer Ker f.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Corrigé : 1. L'application f est à valeurs dans E et linéaire par bilinéarité du produit scalaire et du produit. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, il vient

$$\langle f(x), y\rangle = \langle u, x\rangle \langle v, y\rangle + \langle v, x\rangle \langle u, y\rangle$$

expression symétrique en x et y. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{S}(\mathrm{E})}$$

2. Par liberté de (u, v), il vient pour $x \in \mathrm{E}$

$$f(x) = 0_{\mathrm{E}} \iff \langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}\,(u, v)^{\perp}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\,(u, v)^{\perp}}$$

3. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme f est diagonalisable. On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u, v)$.

Sans difficulté, on observe $\qquad \forall x \in \mathrm{F}^{\perp} \qquad f(x) = 0$

Le sev F est clairement stable par f et notant g l'endomorphisme induit par f sur F et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = (u, v)$, on trouve

$$\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}} g = \begin{pmatrix} \langle u, v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{aligned} \chi_g &= (\mathrm{X} - \langle u, v\rangle)^2 - (\|u\|\|v\|)^2 \\ &= (\mathrm{X} - \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|)\,(\mathrm{X} - \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|) \end{aligned}$$

La famille (u, v) étant libre, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas réalisé et on en déduit que les deux valeurs propres précédemment exhibées ne sont pas nulles. On résout

$$\begin{aligned} (\mathrm{A} - (\langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|)\mathrm{I}_2)\,\mathrm{X} = 0 &\iff \begin{pmatrix} -\|u\|\|v\| & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & -\|u\|\|v\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y) \in \mathrm{Vect}\,((\|v\|, \|u\|)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mathrm{A} - (\langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|)\mathrm{I}_2)\,\mathrm{X} = 0 &\iff \begin{pmatrix} \|u\|\|v\| & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \|u\|\|v\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y) \in \mathrm{Vect}\,((-\|v\|, \|u\|)) \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\text{On a } \mathrm{Sp}\,(f) = \{0, \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|, \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|\} \text{ et les sous-espaces propres associés sont respectivement } \mathrm{Vect}\,(u, v)^{\perp}, \mathrm{Vect}\,((\|v\|, \|u\|)), \mathrm{Vect}\,((-\|v\|, \|u\|)).}$$

Exercice 2 (CCINP 2023)

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(t) = a_n(1-t)t^n$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.

Corrigé : 1. On a $u_n(1) = 0$ pour tout n entier et $u_n(t)\mathrm{O}(t^n)$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,[$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge simplement sur } [\,0\,;1\,].}$$

2. On suppose la suite $(a_n)_n$ non stationnaire à zéro sinon c'est trivial. Les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on a pour n entier

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad u_n'(t) = a_n(nt^{n-1} - (n+1)t^n) = a_n t^{n-1}\,(n-(n+1)t)$$

d'où
$$\|u_n\|_\infty = u_n\frac{n}{n+1} = \frac{a_n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\frac{a_n}{n+1}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement si et seulement si la série } \sum \frac{a_n}{n+1} \text{ converge.}}$$

3. Soit $(n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,]$. On a

$$\mathrm{R}_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(1-t)t^k \leqslant a_{n+1}(1-t)\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = a_{n+1}(1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t}$$

d'où
$$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant a_{n+1} = \mathrm{o}(1)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et son reste converge uniformément d'où

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge uniformément.}}$$

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$ pour tout n entier. On définit le *taux de panne* de X comme la suite $(x_n)_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geqslant n)$$

Soit Y variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Montrer que la loi de Y est bien une loi de probabilité.
2. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)$

   (b) Pour n entier non nul, exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
3. Déterminer les variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant à partir du rang 1.
4. Déterminer le taux de panne de Y.

Corrigé : 1. On a $\dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant 0$ pour tout n entier non nul et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{La loi de Y est bien une loi de probabilité.}}$

2.(a) Soit k entier. On a $\qquad x_k = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, X \geqslant k)}{\mathbb{P}(X \geqslant k)} = \dfrac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \geqslant k)}$

d'où $\qquad x_k \mathbb{P}(X \geqslant k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)$

et par suite $\qquad \mathbb{P}(X \geqslant k + 1) = (1 - x_k)\mathbb{P}(X \geqslant k)$

Par téléscopage, il vient pour n entier non nul

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant 0) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X \geqslant k + 1)}{\mathbb{P}(X \geqslant k)}$$

et comme $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)}$$

2.(b) D'après le début du calcul détaillé à la question précédente, on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = n) = x_n \mathbb{P}(X \geqslant n) = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)}$$

3. On suppose la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ constante égale à $p \in [\,0\,;1\,]$. Comme $x_0 = 0$, on a pour n entier non nul

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$$

Si $p = 0$, alors $\mathbb{P}(X = n) = 0$ pour tout n entier non nul d'où par σ-additivité

$$1 = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = 0$$

ce qui est faux. Si $p = 1$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{X} > 1) = 0$ ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi

$$\boxed{\text{Les variables avec un taux de panne stationnaire à partir du rang 1 suivent une loi géométrique.}}$$

4. Pour la loi de Y, on a $x_0 = 0$ puisque $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour n entier non nul

$$x_n = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)}{\mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n)} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{n}$$

Ainsi
$$\boxed{x_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 4 (CCINP 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline 0 & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Établir $$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) \\ \hline 0 & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{array}\right)$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Corrigé : 1. Par récurrence, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}^k = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^k & k\mathrm{A}^k \\ 0 & \mathrm{A}^k \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) \\ 0 & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{pmatrix}}$$

Si B est diagonalisable, on peut choisir P scindé à racines simples qui annule B. Par conséquent, on a également $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) = 0$. Le polynôme P étant scindé à racines simples, les racines de P' sont distinctes de celles de P d'où $\mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}' = 1$ ou X. Or, on a $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}$ et $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{XP}'$ d'où $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P} \wedge \mathrm{XP}'$ et $\deg \pi_{\mathrm{A}} = 1$ ce qui prouve $\pi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$ et donc $\mathrm{A} = 0$. La réciproque est évidente. On conclut

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix} \text{ diagonalisable } \iff \mathrm{A} = 0}$$

Exercice 5 (CCINP 2023)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

1. Justifier l'existence de I_n pour n entier non nul.

2. Établir $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \mathrm{I}_n$$

3. Étudier la convergence de la suite $\left(n^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_n\right)_{n\geqslant 1}$.

4. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{I}_n$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_1(t)$$

La fonction f_1 est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann puisque $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. La domination assure l'intégrabilité de f_n pour tout n entier non nul et d'après le théorème de convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien définie et } \mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(1+t^3)^n} - \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\right]\,\mathrm{d}t$$

Il vient par linéarité car convergence des intégrales concernée

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = -\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{3n(1+t^3)^n}$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$-\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Par intégration par parties et convergence de l'intégrale concernée, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{(3n(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Ainsi $$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = -\frac{1}{3n}\mathrm{I}_n$$

On conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n}$$

3. Soit n entier non nul. On a

$$\ln\left(\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_{n+1}}{n^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série $\sum \left[\ln\left((n+1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_{n+1}\right) - \ln\left(n^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_n\right)\right]$ converge. D'après le lien suite/série téléscopique, il s'ensuit que la suite $\left(\ln(n^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_n)\right)_n$ converge et par continuité de l'exponentielle

$$\boxed{n^{\frac{1}{3}}\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{C} > 0}$$

4. On a
$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{n^{\frac{1}{3}}}$$

D'après le critère des équivalents (licite, termes positifs) et le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{I}_n \text{ diverge.}}$$

Exercice 6 (Mines 2022)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in \left]0\,;1\right[$. On note $\mathrm{M}_n = \mathrm{Max}\,(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln n} - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : On note $q = 1 - p$. Soit k entier non nul. On a par indépendance des X_i

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant k)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \leqslant k\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant k)$$

puis par égalité en loi

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\ell=1}^{k} \{\mathrm{X}_i = \ell\}\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = \ell) = \sum_{\ell=1}^{k} pq^{\ell-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

et la formule vaut aussi pour $k = 0$. Ainsi, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant k) = (1 - q^k)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{M}_n > k) = 1 - (1 - q^k)^n$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a pour $n \geqslant 2$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln n} - \ell\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell + \varepsilon)\ln n) + \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant (\ell - \varepsilon)\ln n)$$

On note $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \leqslant (\ell - \varepsilon)\ln n) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell + \varepsilon)\ln n)$

Soit n entier non nul. Par croissance de la partie entière, on a

$$\{\mathrm{M}_n \leqslant (\ell - \varepsilon)\ln n\} = \{\mathrm{M}_n \leqslant \lfloor(\ell - \varepsilon)\ln n\rfloor\}$$

d'où
$$a_n = (1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln n\rfloor})^n$$

On choisira ℓ et ε de sorte que $\ell - \varepsilon > 0$ car si on a $\ell - \varepsilon \leqslant 0$, l'événement $\{\mathrm{M}_n \leqslant (\ell - \varepsilon)\ln\}$ est impossible. On a $\ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $\lfloor(\ell - \varepsilon)\ln n\rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et comme $q < 1$, il s'ensuit

$$a_n = \exp\left(n \ln\left(1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln n\rfloor}\right)\right) \quad \text{avec} \quad q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln n\rfloor} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puis
$$\begin{aligned} n\ln\left(1 - q^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln n\rfloor}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -nq^{\lfloor(\ell-\varepsilon)\ln n\rfloor} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\exp\left(\ln n + \lfloor(\ell - \varepsilon)\ln n\rfloor \ln q\right) \end{aligned}$$

Or, on a
$$1 + \frac{\lfloor(\ell - \varepsilon)\ln n\rfloor \ln q}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + (\ell - \varepsilon)\ln q$$

On souhaiterait que cette limite soit > 0 pour tout $\varepsilon > 0$. On choisit $\ell = -\dfrac{1}{\ln q}$ ce qui garantit $\ell > 0$ et rend possible $\ell - \varepsilon > 0$ pourvu que ε soit pris assez petit. Ainsi

$$\ln n + \lfloor(\ell - \varepsilon)\ln n\rfloor \ln q \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et par conséquent
$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ensuite, on a
$$\{\mathrm{M}_n \geqslant (\ell + \varepsilon)\ln n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{X}_i \geqslant (\ell + \varepsilon)\ln n\}$$

Par inégalité de Boole et égalité en loi des X_i, il s'ensuit

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln n) \leqslant n\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln n)$$

Par croissance de la partie entière supérieure, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant (\ell+\varepsilon)\ln n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant \lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil) = 1-(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil-1})^n$$

On a $$(1-q^{\lceil\ell+\varepsilon)\ln n\rceil-1})^n = \exp\left(n\ln\left(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil-1}\right)\right)$$

avec $$\begin{aligned} n\ln\left(1-q^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil-1}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -nq^{\lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\ln n + (\lceil(\ell+\varepsilon)\ln n\rceil - 1)\ln q\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\ln n(\varepsilon\ln q + \mathrm{o}(1))\right) \end{aligned}$$

On en déduit $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall\varepsilon>0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{M}_n}{\ln n}+\frac{1}{\ln q}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 7 (CCINP 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^\top = I_n$.

1. Justifier que pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)$.
2. Montrer que la matrice A est inversible si et seulement $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé : 1. On a $$\chi_M = \det(XI_n - M) = \det(XI_n - M)^\top = \chi_{M^\top}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)}$$

2. On a $A^2 = I_n - A^\top$ d'où $\det(A)^2 = \chi_{A^\top}(1)$. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff 1 \notin \mathrm{Sp}(A)}$$

On suppose $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Il vient

$$A^2X + A^\top X = A^\top X = X$$

puis en multipliant à gauche par $X^\top$

$$(AX)^\top X = X^\top X = 0$$

d'où $X = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

3. On transpose la relation et on a $\left(A^\top\right)^2 + A = I_n$ d'où, en substituant $A^\top$ dans cette dernière relation par $A^\top = I_n - A^2$

$$(I_n - A^2)^2 + A = I_n$$

c'est-à-dire $$A^4 - 2A^2 + A = 0$$

Ainsi $$\boxed{\text{Le polynôme } P = X^4 - 2X^2 + X \text{ est annulateur de A.}}$$

On trouve après factorisation

$$P = X(X-1)(X^2 + X - 1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta) \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Le polynôme P annulateur de A est scindé à racines simples et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable.}}$$

Exercice 8 (CCINP 2023)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $+\infty$. On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer $\qquad \forall (k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad a_k r^k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \, \mathrm{d}\theta$

2. On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Corrigé : 1. Soit k entier et $\theta \in [\,0\,; 2\pi\,]$. On a

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$$

Notons $\qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N} \times [\,0\,; 2\pi\,] \qquad u_n(\theta) = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = |a_n|\, r^n$

et $\sum |a_n|\, r^n$ converge absolument puisque $r < \mathrm{R}$. On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_n$ d'où, en intégrant terme à terme

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta} \, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta} \, \mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n,k}}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \, \mathrm{d}\theta}$

2. Soit $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire, il vient pour k entier non nul et $r > 0$

$$2\pi r^k\, |a_k| \leqslant \int_0^{2\pi} \left| f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} \right| \, \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{M} \, \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{M}$$

D'où $\qquad \forall r > 0 \qquad |a_k| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{r^k}$

Faisant tendre $r \to +\infty$, on en déduit $\dfrac{\mathrm{M}}{r^k} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$ et d'où $a_k = 0$ pour k entier non nul. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule *théorème de Liouville.*

Exercice 9 (Mines 2022)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$.
2. Une urne contient n boules. On tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$. Choisir $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ équivaut à choisir Y puis choisir X une partie de Y. Par conséquent, il vient

$$\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}\} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mathrm{Y} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), \mathrm{Card}\ \mathrm{Y}=k} \mathrm{Card}\ \mathcal{P}(\mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}\} = 3^n}$$

2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $\widetilde{\mathrm{X}}$, $\widetilde{\mathrm{Z}}$ les variables aléatoires correspondant aux tirages de poignées successifs. On a $\widetilde{\mathrm{X}}$ et $\widetilde{\mathrm{Z}}$ indépendantes de même loi $\mathscr{U}_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}$ où E est l'ensemble des boules. On cherche $\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing)$. On a

$$\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing) = \frac{\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \cap \mathrm{Z} = \varnothing\}}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(\mathrm{E})^2} \underbrace{=}_{\mathrm{Y}=\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Z}} \frac{\mathrm{Card}\ \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}\}}{\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(\mathrm{E})^2}$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\widetilde{\mathrm{X}} \cap \widetilde{\mathrm{Z}} = \varnothing) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

Remarques : (a) Pour le cadre formel, on peut considérer $\Omega = \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme et $\widetilde{\mathrm{X}} : \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1$, $\widetilde{\mathrm{Z}} : \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2$.
(b) L'application $(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \mapsto (x, \mathrm{X} \cup \mathrm{Z})$ réalise une bijection entre les ensembles

$$\{(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \cap \mathrm{Z} = \varnothing\} \quad \text{et} \quad \{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2, \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}\}$$

ce qui justifie précisément l'égalité des cardinaux précédemment mentionnée.

Exercice 10 (Mines 2021)

Montrer qu'il existe un multiple positif de 2021 dont l'écriture décimale est constituée de 1.

Corrigé : Supposons le problème résolu. Cela signifie qu'il existe k et N entiers non nuls tel que

$$2021k = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} 10^i = \frac{10^{\mathrm{N}} - 1}{10 - 1} \iff 2021 \times 9k + 1 = 10^{\mathrm{N}}$$

Comme 2021 est impair et non multiple de 5, on a $10 \wedge 2021 = 1$ et aussi $10 \wedge 9 = 1$ d'où $\overline{10} \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(2021 \times 9)\mathbb{Z})$. Ainsi, prenant $\mathrm{N} = o(\overline{10})$ l'ordre de $\overline{10}$ dans $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/(2021 \times 9)\mathbb{Z})$, on a bien

$$10^{\mathrm{N}} \equiv 1 \; [2021 \times 9] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \qquad 10^{\mathrm{N}} = 1 + 2021 \times 9k$$

Il est clair que k est positif et on conclut

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{N} \quad | \quad 2021k = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} 10^i}$$

Remarque : Qu'en est-il pour 2022 ? S'il existe k et N entiers tels que

$$2022k = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}-1} 10^i$$

alors, on a $$1 = 10^{\mathrm{N}} - 9 \times 2022k = 10 \times 10^{\mathrm{N}-1} - 2022 \times 9k$$

D'après le théorème de Bezout, il s'ensuit $10 \wedge 2022 = 1$ ce qui est faux. Le résultat n'a donc pas lieu pour 2022.

Exercice 11 (Mines 2016)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels définis par $u_1 > 0$ et

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

avec $\alpha > 0$.

1. Discuter de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de α.
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite ℓ, déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$ pour $n \to +\infty$.
3. Préciser une équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$ si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

Corrigé : 1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est clairement à termes positifs et clairement croissante. On a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}$$

d'où

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est de même nature que la suite $(u_n^2)_{n\geqslant 1}$ qui est de même nature que la série téléscopique $\sum \left[u_{n+1}^2 - u_n^2\right]$ d'où, par critère de Riemann

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

2. Supposons $\alpha > 1$. Par sommation des relations de comparaison, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left[u_{k+1}^2 - u_k^2\right] = \ell^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{k^\alpha}$$

Par comparaison série/intégrale, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{2}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et

$$\ell^2 - u_n^2 = (\ell - u_n)(\ell + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ell(\ell - u_n)$$

D'où

$$\boxed{u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)\ell n^{\alpha-1}}}$$

3. Pour $\alpha \in \left]\,0\,;1\,\right]$, on a par sommation des relations de comparaison et comparaison série/intégrale

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[u_{k+1}^2 - u_k^2\right] = u_n^2 - u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{2\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} n^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad \text{si} \quad \alpha \in \left]\,0\,;1\,\right[\quad \text{et} \quad \sqrt{2\ln n} \quad \text{si} \quad \alpha = 1}$$

Exercice 12 (Mines-Telecom 2021)

1. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Déterminer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que le nombre S est irrationnel.

Corrigé : 1. On reconnaît la série associée à $\cos 1$ puisque $\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^n}{(2n)!}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ converge et sa somme S vaut } \cos 1.}$$

2. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

On a
$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \frac{1}{(2(n+1)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

et
$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!} > 0$$

La suite $(\mathrm{S}_{2n})_n$ décroît strictement et la suite $(\mathrm{S}_{2n+1})_n$ croît strictement. Or, ces deux suites sont adjacentes puisque $\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et de limite commune S. Ainsi, on a l'encadrement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{2n+1} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}}$$

3. Soit n entier. On a
$$\mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n} - \frac{1}{(4n+2)!} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}$$

d'où
$$0 < \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S} < \frac{1}{(4n+2)!}$$

et ainsi
$$0 < (4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S} < 1$$

La quantité $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n}$ est un entier relatif en tant que somme d'entiers relatifs. Supposons S rationnel, à savoir $\mathrm{S} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Si n est assez grand, alors $(4n+2)!\dfrac{p}{q}$ est entier (puisque q est facteur d'une factorielle assez grande) et par conséquent, le nombre $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S}$ est un entier relatif dans $]\,0\,;1\,[$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Le nombre S est irrationnel.}}$$

Exercice 13 (Mines-Telecom 2021)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Y}_k = \frac{\mathrm{S}^k\mathrm{X}}{\|\mathrm{S}^k\mathrm{X}\|}$$

Justifier que la suite $(\mathrm{Y}_k)_k$ est bien définie puis montrer qu'elle converge vers un vecteur propre de S.

Corrigé : D'après le théorème spectral, on a

$$\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Par une récurrence immédiate, pour $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda^k x_\lambda$$

Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on pose

$$\Lambda_x = \{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \mid x_\lambda \neq 0_\mathrm{E}\} \quad \text{ et } \quad \alpha_x = \max \Lambda_x$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Par définition de Λ_x, on a

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_x} x_\lambda = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} x_\lambda$$

Ainsi $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \alpha_x^k x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \lambda^k x_\lambda$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Comme $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, la valeur propre α_x est strictement positive et on a

$$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad 0 < \lambda < \alpha_x$$

d'où $$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent $$\frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x) = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k x_\lambda \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_{\alpha_x}$$

L'endomorphisme u est un automorphisme d'où u^k également pour tout k entier. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a $u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}$ et par conséquent

La suite $(x_k)_k$ est bien définie.

On pose $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad v_k = \frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x)$$

On obtient $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

D'après le résultat de la question 4 et la continuité de la norme, on conclut

$$\boxed{x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{x_{\alpha_x}}{\|x_{\alpha_x}\|} \in \mathrm{E}_{\alpha_x}(u)}$$

Remarque : Il s'agit d'une déclinaison pour un endomorphisme symétrique défini positif de *la méthode de la puissance itérée.*

Exercice 14 (CCINP 2023)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$. Établir $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$.
2. Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes espaces propres.
3. Établir que les espaces propres de l'endomorphisme u sont orthogonaux.
4. Montrer que si l'endomorphisme u est diagonalisable, alors il est auto-adjoint.

Corrigé : 1. On a

$$\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \langle x, u \circ u^*(x)\rangle = \langle x, u^* \circ u(x)\rangle = \langle x, u^*(\lambda x)\rangle = \langle u(x), \lambda x\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle$$

Ainsi $$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \forall x \in \mathrm{E}_\lambda(u) \qquad \|u^*(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2}$$

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$. On a

$$\|u^*(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2\lambda\,\langle u^*(x), x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 = 2\lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\,\langle x, u(x)\rangle = 0$$

On en déduit $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathrm{Sp}\,(u^*)$ et $\mathrm{E}_\lambda(u) \subset \mathrm{E}_\lambda(u^*)$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. En appliquant ces résultats à u^* et $u^{**} = u$ qui commutent, on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } u \text{ et } u^* \text{ ont les mêmes espaces propres.}}$$

3. Soient λ, μ valeurs propres distinctes de u et $(x, y) \in \mathrm{E}_\lambda(u) \times \mathrm{E}_\mu(u)$. On a

$$\lambda\,\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\,\langle x, y\rangle$$

d'où $\langle x, y\rangle = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Les espaces propres de l'endomorphisme } u \text{ sont orthogonaux.}}$$

4. On suppose l'endomorphisme u diagonalisable. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation de u associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad u(e_i) = \lambda_i e_i = u^*(e_i)$$

Ainsi, les endomorphismes u et u^* coïncident sur la base $\mathscr{B}$ ce qui implique $u = u^*$ et on conclut

$$\boxed{\text{Si l'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable, alors il est auto-adjoint.}}$$