ISM MP, Mathématiques
Année 2023/2024

Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f(e_i) = v$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ avec $v \in \mathrm{E}$.

1. Donner le rang de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Corrigé : Exercice 72 CCPINP 2023

Exercice 2 (CCINP 2023)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Corrigé : Exercice 10 CCINP 2023

Exercice 3 (CCINP 2023)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par $\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = p_n$ pour n entier. La fonction génératrice de X est notée $\mathrm{G_X}$ et elle est définie par $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1\,;1\,[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $\mathrm{G_X}$.
2. Soient $\mathrm{X_1}$ et $\mathrm{X_2}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X_1} + \mathrm{X_2}$. Montrer que $\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_{X_1}}(t)\mathrm{G_{X_2}}(t)$ pour $t \in \,]-1\,;1\,[$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}})$.

   Remarque : On admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotées 2. Soit n entier non nul. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in \,]-1\,;1\,[$. Déterminer $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Corrigé : Exercice 96 CCPINP 2023

Exercice 4 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable par f pour tout $x \in \mathrm{E}$.
3. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2n$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

Corrigé : 1. On a $$\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}\,) = (-1)^{\dim \mathrm{E}}$$

Comme un réel au carré est positif, on conclut

$$\boxed{\text{La dimension de E est paire.}}$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour α, β réels, il vient

$$f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) - \beta x \in \mathrm{Vect}\,(x, f(x))$$

Ainsi $$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E}, \text{ le sev } \mathrm{Vect}\,(x, f(x)) \text{ est stable par } f.}$$

3. On construit la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ par récurrence. On choisit $e_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$. Supposons $(e_1, f(e_1))$ liée. Comme le vecteur e_1 n'est pas nul, on a $f(e_1)$ colinéaire à e_1 ce qui signifie e_1 vecteur propre de f et qui est absurde puisque le spectre réel de f est vide, le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ étant annulateur de f. On suppose avoir construit $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k))$ famille libre avec $k \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$. On complète cette famille en $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ famille libre de E. Montrons la liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2(k+1)}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) = 0_{\mathrm{E}}$. Si $\beta_{k+1} = 0$, on a par hypothèse $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, k+1]\!]$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$. Supposons $\beta_{k+1} \neq 0$. Il vient

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i))\right) = \sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) = 0_{\mathrm{E}}$$

On note $r = \dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}$ et on écrit la combinaison

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) - r \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} [(-\beta_i - r\alpha_i)\, e_i + (\alpha_i - r\beta_i)\, f(e_i)] - (\beta_{k+1} - r\alpha_{k+1})\, e_{k+1} = 0_{\mathrm{E}}$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1})$, il vient

$$\forall i \in [\![1 \,;\, k]\!] \qquad \begin{cases} \beta_i + r\alpha_i = 0 \\ \alpha_i - r\beta_i = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \beta_{k+1}^2 + \alpha_{k+1}^2 = 0$$

d'où $$\forall i \in [\![1 \,;\, k]\!] \qquad \alpha_i(1 + r^2) = \beta_i(1 + r^2) = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = 0$$

et on en déduit la nullité de tous les coefficients. On construit alors la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ selon le procédé décrit ci-avant. La famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est libre de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe une base de E de la forme } \mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n)) \\ \text{avec les } e_i \text{ dans E et } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}) \text{ avec } \mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right). \end{array}}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre en $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Corrigé : On a
$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 \\ -1 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$$

Par condition suffisante, la matrice A est diagonalisable. On a
$$(x,y) \in \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) \iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0 \iff x - y = 0 \iff (x,y) = x(1,1)$$

et
$$(x,y) \in \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \iff \mathrm{AX} = 0 \iff (x,y) = x(1,-1)$$

Ainsi
$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, notant $\mathrm{M} = \mathrm{PXP}^{-1}$ avec $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a
$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A} \iff \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} + \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D}$$

On remarque
$$\mathrm{XD} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 = \mathrm{DX}$$

Posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve
$$\mathrm{XD} - \mathrm{DX} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff (b,c) = 0$$

Ainsi $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D} \iff \begin{cases} a^2 + a = 0 \\ d^2 + d = 2 \end{cases} \iff (a,d) \in \{(0,1),(0,-2),(-1,1),(-1,-2)\}$

Enfin après calcul des matrices $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, on conclut
$$\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : On a vu que les matrices X et D commutent et par conséquent, la matrice X est diagonale. C'est un fait plus général : pour f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, si f et g commutent et f diagonalisable à valeurs propres simples, alors $g \in \mathbb{K}[f]$ et donc g est en particulier diagonalisable pour le même changement de base que f. Le lecteur curieux pourra se référer à l'exercice 13 de la feuille 22.

Exercice 6 (Mines 2023)

1. Soit $\mathrm{A} \geqslant 0$ et f, g dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. On considère l'équation différentielle
$$x'' + a(t)x = b(t) \tag{$*$}$$
avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et b et $t \mapsto ta(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Soit x une solution de $(*)$.

(a) Établir

$$\forall t \geqslant 1 \qquad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t (t-u)b(u)\,\mathrm{d}u$$

(b) On pose $$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$$

Montrer qu'il existe $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^t u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^{+\infty} u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right)$$

Corrigé : 1. On pose $\mathrm{U}(x) = \mathrm{A} + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$. La fonction U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{U}'(x) = f(x)g(x)$ pour $x \geqslant 0$ d'où

$$\mathrm{U}'(x) = f(x)g(x) \leqslant g(x)\mathrm{U}(x)$$

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad h(x) = \mathrm{U}'(x) - g(x)\mathrm{U}(x)$$

et on décide de considérer cette relation comme équation différentielle en U de second membre h. Par variation de la constante, on trouve

$$\begin{aligned}\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{U}(x) &= \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{U}(0) + \int_0^x \exp\left(-\int_0^s g(t)\right)\,\mathrm{d}t\,\underbrace{h(s)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}s\right)\\ &\leqslant \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{U}(0)\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{U}(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$

2.(a) Comme l'équation différentielle est sous forme normalisée, on sait que $x \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, il vient

$$\forall t \geqslant 1 \qquad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) + \int_1^t (t-u)x''(u)\,\mathrm{d}u$$

Or, on a $$\forall u \geqslant 0 \qquad x''(u) = b(u) - a(u)x(u)$$

D'où $$\boxed{\forall t \geqslant 1 \qquad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t (t-u)b(u)\,\mathrm{d}u}$$

2.(b) Le *lemme de Gronwall* établi à la question 1 se décline à l'identique sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$. Soient f, g dans $\mathscr{C}^0([\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_1^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors $$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

D'après l'égalité établie à la question précédente, il vient pour $t \geqslant 1$

$$\frac{x(t)}{t} = \frac{x(1)}{t} + \frac{t-1}{t}x'(1) - \int_1^t \frac{t-u}{t}a(u)x(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t \frac{t-u}{t}b(u)\,\mathrm{d}u$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour $t \geqslant 1$ en observant $\dfrac{t-u}{t} \leqslant 1$ pour $u \geqslant 0$

$$\begin{aligned} y(t) &\leqslant |x(1)| + |x'(1)| + \int_1^t |b(u)|\ \mathrm{d}u + \int_1^t y(u)u\,|a(u)|\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant \underbrace{|x(1)| + |x'(1)| + \int_1^{+\infty} |b(u)|\ \mathrm{d}u}_{=\mathrm{K}} + \int_1^t y(u)u\,|a(u)|\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on conclut

$$\boxed{\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^t u\,|a(u)|\ \mathrm{d}u\right) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^{+\infty} u\,|a(u)|\ \mathrm{d}u\right)}$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler puis, pour n entier non nul, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
2. Pour n entier non nul, calculer $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $\mathrm{C} = \big(i \wedge j\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec n entier non nul.

Corrigé : 1. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) = \mathrm{Card}\ \{k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \mid k \wedge n = 1\}$$

Pour $n \geqslant 2$, on note $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers avec les p_i premiers deux à deux distincts et les α_i entiers non nuls. D'après le théorème chinois et le comptage des diviseurs d'une puissance d'un nombre premier, il vient

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$$

D'où
$$\boxed{\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = n \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}$$

2. On a
$$[\![\, 1\,;\, n \,]\!] = \bigsqcup_{d|n} \{k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \mid k \wedge n = d\}$$

Par ailleurs, pour $d|n$, on a

$$k \wedge n = d \iff \exists!(k', n') \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad k = k'd \qquad n = n'd \quad \text{et} \quad k' \wedge n' = 1$$

Comme n est entier non nul, alors $n' = \dfrac{n}{d}$ l'est également. Ainsi, on peut mettre en bijection $k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ vérifiant $k \wedge n = d$ avec $k' \in [\![\, 1\,;\, n' \,]\!]$ vérifiant $k' \wedge n' = 1$. Il s'ensuit

$$\mathrm{Card}\ \{k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \mid k \wedge n = d\} = \mathrm{Card}\ \{k' \in [\![\, 1\,;\, n' \,]\!] \mid k' \wedge n' = 1\} = \varphi(n')$$

Comme il s'agit d'union disjointe, on obtient

$$\mathrm{Card}\,[\![\, 1\,;\, n \,]\!] = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

et comme l'application $d \mapsto \dfrac{n}{d}$ réalise une permutation de l'ensemble des diviseurs de n (involutive), on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{d|n} \varphi(d) = n}$$

3. Soit $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]$. On rappelle que pour d entier, on a

$$d|i \wedge j \iff d|i \quad \text{et} \quad d|j$$

D'après la relation précédemment établie, il vient

$$i \wedge j = \sum_{d|i\wedge j} \varphi(d) = \sum_{d|i,\, d|j} \varphi(d) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

avec
$$a_{i,k} = \varphi(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k) \quad \text{et} \quad b_{k,j} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k)$$

d'où
$$\mathrm{C} = \mathrm{AB} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

La matrice A est triangulaire inférieure et la matrice B est triangulaire supérieure. Ainsi, on obtient

$$\det \mathrm{C} = (\det \mathrm{A})(\det \mathrm{B}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)$$

Et on conclut
$$\boxed{\det \mathrm{C} = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)}$$

Exercice 8 (Centrale 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)|}$$

1. Si $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ est un singleton, montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(\mathrm{A})$.
2. Donner un exemple de matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.
3. On suppose que la matrice A admet au moins deux valeurs propres distinctes.
   (a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_n$.
   (b) Montrer que $\rho(\mathrm{A})$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. Comme χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on dispose de P dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \lambda \mathrm{I}_d + \mathrm{T}$ avec λ complexe et T triangulaire supérieure stricte. Il s'ensuit que pour n entier, on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} = \lambda^n \mathrm{I}_d + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

d'où
$$|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)| = |\mathrm{Tr}\,(\lambda^n \mathrm{I}_d)| = |\lambda|^n\, d$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = |\lambda|\, \sqrt[n]{d} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda| = \rho(\mathrm{A})}$$

2. On choisit $\mathrm{A} = \mathrm{R}\,(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^{2n} = \mathrm{R}(\pi n) = (-1)^n \mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{2n+1} = \mathrm{R}(\pi n)\mathrm{A} = (-1)^n \mathrm{A}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{2n} = \sqrt[2n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas.}}$

3.(a) La suite $(z^n)_n$ est à valeurs dans le compact $\mathbb{U}$ en tant que fermé borné de $\mathbb{C}$. On dispose de φ extractrice telle que

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad \theta \text{ réel}$$

On pose définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n)+1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1)}_{\geqslant 1} + \psi(n) > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ avec $(\psi(n))_n$ sous-suite $(\varphi(n))_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1)-\psi(n)} = z^{\psi(n+1)}\overline{z^{\psi}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (z^n)_n \text{ admet 1 comme valeur d'adhérence.}}$

3.(b) On a nécessairement $\rho(\mathrm{A}) > 0$ puisque la matrice A admet au moins deux valeurs propres distinctes. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives $m_0, \ldots, m_p$ avec $\rho(\mathrm{A}) = |\lambda_0|$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{p} m_k z_k^n \right) \quad \text{avec} \quad z_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$$

Soit $s \in [\![\, 0\,;\, p \,]\!]$ tel que $|z_i| < 1$ pour $i \in [\![\, s+1\,;\, p\,]\!]$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{s} m_k z_k^n + \mathrm{o}(1) \right)$$

La suite $(z_1^n, \ldots, z_s^n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{U}^s$, compact comme produit fini de compacts. On dispose donc φ extractrice telle que

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, s\,]\!] \qquad z_k^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} \quad \text{avec} \quad \theta_k \text{ réel}$$

En procédant comme à la question 3.(a), on construit une extractrice ψ, définie uniquement à partir de φ, telle que $\chi = \psi(\cdot + 1) - \psi$ est une extractrice et vérifiant

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, s\,]\!] \qquad z_k^{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi $$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^{\chi(n)}) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{s} m_k + \mathrm{o}(1) \right)$$

d'où $$u_{\chi(n)} = \rho(\mathrm{A}) \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{s} m_k + \mathrm{o}(1)}$$

On conclut $\boxed{\text{Le rayon spectral } \rho(\mathrm{A}) \text{ est valeur d'adhérence de la suite } (u_n)_{n\geqslant 1}.}$