Exercice 1 (CCINP 2023)

On tire au hasard un entier non nul. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\dfrac{1}{2^n}$. Pour k entier non nul, on note A_k l'événement « n est un multiple de k ».

1. Vérifier que ceci définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
2. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ pour k entier non nul.
3. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3)$.
4. Pour p et q entiers $\geqslant 2$, montrer que les événements A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Corrigé : 1. On a $\dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$ pour n entier et non nul et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien défini une probabilité sur } (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)).}$$

2. Soit k entier non nul. On a $\mathrm{A}_k = k\mathbb{N}^*$ d'où par σ-additivité

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} \{k\ell\}\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\ell\})$$

Ainsi
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = \frac{1}{2^k - 1}}$$

3. On a
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_2) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_3) - \mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3)$$

On observe
$$\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 = 2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^* = (2 \vee 3)\mathbb{N}^* = 6\mathbb{N}^*$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_2) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_3) - \mathbb{P}(\mathrm{A}_6)$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}}$$

3. Soient p et q entiers $\geqslant 2$. On trouve

$$\mathrm{A}_p \cap \mathrm{A}_q = p\mathbb{N}^* \cap q\mathbb{N}^* = (p \vee q)\mathbb{N}^*$$

d'où
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_p \cap \mathrm{A}_q) = \frac{1}{2^{p \vee q} - 1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{A}_p)\mathbb{P}(\mathrm{A}_q) = \frac{1}{(2^p - 1)(2^q - 1)}$$

On a les équivalences

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_p \cap \mathrm{A}_q) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_p)\mathbb{P}(\mathrm{A}_q) \iff (2^p - 1)(2^q - 1) = 2^{p \vee q} - 1 \iff 2^{p \vee q} + 2^p + 2^q = 2^{p+q} + 2$$

Or, dans la dernière égalité, le terme de gauche est un multiple de 4 mais pas le terme de droite. On conclut

$$\boxed{\text{Pour } p,\, q \text{ entiers } \geqslant 2, \text{ les événements } \mathrm{A}_p \text{ et } \mathrm{A}_q \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Exercice 2 (Centrale 2022)

Soit E un espace préhilbertien de dimension (finie ou non) supérieure ou égale à 2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que

(i) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)\,;$

(ii) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad x \perp y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \perp f(y).$

1. Montrer :

   (a) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{Q} \times \mathrm{E} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)\,;$

   (b) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| = \|y\| \quad \Longrightarrow \quad \|f(x)\| = \|f(y)\|.$

2. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathrm{B}_f(0,1)$.
3. Montrer que la fonction f est continue puis qu'il s'agit d'une similitude vectorielle, *i.e.* une constante fois une isométrie vectorielle.

Corrigé : 1.(a) On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Une récurrence immédiate donne $f(nx) = nf(x)$ pour tout n entier. Puis, on observe $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$ et par récurrence, il vient $f(-nx) = -nf(x)$ pour tout n entier. Enfin, pour $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on obtient

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$$

Ainsi $\boxed{\forall (\lambda, x) \in \mathbb{Q} \times \mathrm{E} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)}$

1.(b) Considérons u et v dans E unitaires. On a

$$\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0$$

d'où $\quad \langle f(u+v), f(u-v) \rangle = \langle f(u) - f(v), f(u) + f(v) \rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0$

ce qui prouve $\|f(u)\| = \|f(v)\|$. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, non nuls. Posant $u = x/\|x\|$ et $v = y/\|y\|$, on en déduit

$$\|y\|\|f(x)\| = \|x\|\|f(y)\|$$

On conclut $\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| = \|y\| \quad \Longrightarrow \quad \|f(x)\| = \|f(y)\|}$

2. D'après ce qui précède, la fonction $x \in \mathrm{E} \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité $\mathrm{S}(0,1)$. Notons α la valeur prise par f sur $\mathrm{S}(0,1)$. Soit $x \in \mathrm{B}(0,1)$. On choisit $u \in \mathrm{Vect}\,(x)^\perp$ tel que $\|u\| = \sqrt{1 - \|x\|^2}$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, il vient

$$\|x+u\|^2 = \|x\|^2 + \|u\|^2 = 1$$

d'où $\|f(x+u)\| = \alpha$. Par choix de $u \perp x$, on a $f(u) \perp f(x)$ et par ailleurs $f(x+u) = f(x) + f(u)$. D'après le théorème de Pythagore, on trouve

$$\|f(x+u)\|^2 = \|f(x) + f(u)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(u)\|^2 = \alpha^2$$

et par suite $$\|f(x)\| \leqslant \alpha$$

On conclut $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bornée sur } \mathrm{B}_f(0,1).}$

3. Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ avec $x \neq y$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a $[\,\|x-y\|\,;2\|x-y\|\,] \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$. On dispose donc de $\lambda \in [\,1\,;2\,]$ tel que $\lambda\|x-y\| \in \mathbb{Q}$. D'après le résultat des questions précédentes, il vient

$$\left\| f\left(\frac{x-y}{\lambda\|x-y\|}\right)\right\| = \frac{1}{\lambda\|x-y\|}\|f(x-y)\| \leqslant \alpha$$

d'où $$\|f(x)-f(y)\| = \|f(x-y)\| \leqslant \alpha\lambda\|x-y\| \leqslant 2\alpha\|x-y\|$$

L'application f est donc lipschitzienne et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue.}}$$

Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times \mathrm{E}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $(\lambda_n)_n$ suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Par continuité de f, on obtient

$$f(\lambda_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\lambda x)$$

or $$f(\lambda_n x) = \lambda_n f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda f(x)$$

Par unicité de la limite, on trouve $\qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ce qui prouve $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Ainsi, pour $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \alpha$$

d'où $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$ et l'égalité vaut aussi pour $x = 0$. Si $\alpha = 0$, on peut écrire $f = \alpha\,\mathrm{id}$ et le résultat attendu a lieu. Supposons $\alpha \neq 0$. L'application $\dfrac{1}{\alpha}f$ est donc un endomorphisme de E qui préserve la norme et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une similitude.}}$$

Exercice 3 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul, $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, N une norme sur E et S la sphère unité de E. On pose

$$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) = \sup\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$$

1. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \det \mathrm{M}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{S}$ telle que $f(\mathrm{A}_0) = \underset{\mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, f$ puis que A_0 est inversible
2. Montrer que $\mathrm{N}^\star$ est une norme sur E.
3. Montrer $$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}_0^{-1}) = n$$

Corrigé : 1. L'application f est continue car polynomiale en les coefficients de M. L'ensemble S est un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie ce qui prouve que S est un compact et par conséquent, la fonction f atteint son maximum sur S, *i.e.*

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{A}_0 \in \mathrm{S} \text{ telle que } f(\mathrm{A}_0) = \underset{\mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, f.}$$

Puis $$f(\mathrm{A}_0) \geqslant f\left(\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)^n} > 0$$

Il s'ensuit $$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_0 \text{ est inversible.}}$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. L'ensemble $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ en considérant par exemple $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n/\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)$ et en munissant E de sa structure euclidienne canonique, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \left\langle \mathrm{A}^\top, \mathrm{M} \right\rangle \leqslant \|\mathrm{A}^\top\|\,\|\mathrm{M}\|$$

Les normes N et $\|\cdot\|$ étant équivalentes, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\|\mathrm{M}\| \leqslant \alpha \mathrm{N}(\mathrm{M}) = \alpha$ ce qui prouve que l'ensemble $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure finie. Pour $\mathrm{A} \neq 0_\mathrm{E}$, en choisissant $\mathrm{M} = \mathrm{A}^\top/\mathrm{N}(\mathrm{A}^\top) \in \mathrm{S}$, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \|\mathrm{A}^\top\|^2/\mathrm{N}(\mathrm{A}^\top) > 0$. Il s'ensuit que $\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$ est une quantité strictement positive pour $\mathrm{A} \neq 0_\mathrm{E}$, nulle si et seulement si $\mathrm{A} = 0_\mathrm{E}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,(\lambda \mathrm{AM}) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$$

avec $\widehat{\mathrm{M}} = \pm\,\mathrm{M} \in \mathrm{S}$ telle que $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{M}}) \geqslant 0$. Et passant à la borne supérieure, il s'ensuit

$$\mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$$

Puis, pour $\lambda \neq 0$ $$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda \mathrm{A}\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A})$$

d'où $$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A})$$

l'inégalité étant trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par double inégalité, l'homogénéité s'en déduit. Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BM}) \leqslant \mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) + \mathrm{N}^\star(\mathrm{B})$$

d'où l'inégalité triangulaire. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{N}^\star \text{ est une norme.}}$$

Remarque : Pour le caractère borné de $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$, on peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes avec l'application continue $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM})$ sur le compact S.

3. On a $$\mathrm{N}^*(\mathrm{A}_0^{-1}) \geqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_0^{-1}\mathrm{A}_0) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$$

L'inégalité dans l'autre sens est plus délicate. Pour $t > 0$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, on a

$$f\left(\frac{\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}}{\mathrm{N}(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M})}\right) \leqslant f(\mathrm{A}_0)$$

Puis $$\det(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}) \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\mathrm{N}(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M})^n \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\left(\mathrm{N}(\mathrm{A}_0) + t\mathrm{N}(\mathrm{M})\right)^n$$

Ainsi $$\frac{\det(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}) - \det(\mathrm{A}_0)}{t} \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\frac{(1 + t\mathrm{N}(\mathrm{M}))^n - 1}{t}$$

Faisant tendre $t \to 0^+$, on obtient (sous réserve de connaître la différentielle du déterminant...)

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(\mathrm{A}_0)\mathrm{M}^\top\right) \leqslant \det(\mathrm{A}_0) n\mathrm{N}(\mathrm{M})$$

c'est-à-dire $$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}_0^{-1}\mathrm{M}\right) \leqslant n$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}_0^{-1}) = n}$$

Exercice 4 (Mines 2021)

Soit $n \geqslant 2$.

1. Soit V sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contenant toutes les matrices nilpotentes. Montrer que V contient une matrice inversible.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : 1. Par stabilité par combinaison linéaire, le sev contient donc $\mathrm{E}_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}_{i,i+1}$, somme de deux matrices triangulaires strictes. Ainsi

$$\boxed{\text{Le sous-espace V contient une matrice inversible.}}$$

2. Soit H hyperplan de $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons $\mathrm{H} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \varnothing$. Comme $\mathrm{I}_n \notin \mathrm{H}$, alors $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ nilpotente. Il existe $(\mathrm{A}, \lambda) \in \mathrm{H} \times \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$ avec $\mathrm{X} \neq 0$, choix possible puisque A n'est pas inversible. On trouve $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$. Or, le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à $\{0\}$ d'où $\lambda = 0$ et par conséquent $\mathrm{M} = \mathrm{A} \in \mathrm{H}$. Ainsi, l'hyperplan contient toutes les matrices nilpotentes et donc également une matrice inversible ce qui contredit l'hypothèse faite sur H. Par conséquent

$$\boxed{\text{Tout hyperplan de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ rencontre } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 5 (Mines 2022)

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour p entier non nul et $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}_p(f) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \left|t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)\right|$$

1. Soit p entier non nul. Montrer que N_p est une norme sur E.
2. Soit c réel et p entier non nul. Étudier la continuité de l'application $\Phi_c : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$ pour la norme N_p.
3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Corrigé : 1. Soit p entier non nul et $f \in \mathrm{E}$. On a $t^p \mathrm{e}^{-|t|} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ par croissances comparées. On en déduit que $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et la quantité N_p est donc bien définie. On remarque l'égalité

$$\mathrm{N}_p(f) = \|t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)\|_\infty$$

Les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire en découlent. Supposons $\mathrm{N}_p(f) = 0$. Par séparation de $\|\cdot\|_\infty$, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t) = 0$$

d'où $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et comme la fonction f est continue en particulier en zéro, on obtient $f = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{N}_p \text{ est une norme sur E.}}$$

2. Soit p entier non nul. Pour c réel, l'application Φ_c évaluation en c est clairement linéaire. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. On a

$$|f(c)| = \left|c^p \mathrm{e}^{-|c|} f(c)\right| \left|c^{-p} \mathrm{e}^{|c|}\right|$$

d'où
$$|\Phi_c(f)| \leqslant \left|c^{-p} \mathrm{e}^{|c|}\right| \mathrm{N}_p(f)$$

ce qui prouve que l'application Φ_c est lipschitzienne en zéro. Supposons ensuite $c = 0$. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = \mathrm{e}^{-n|t|}$$

Pour n entier, l'application f_n est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par parité, on observe

$$\mathrm{N}_p(f_n) = \operatorname*{Sup}_{t\geqslant 0} t^p \mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

La fonction $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-(n+1)t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto t^{p-1} \mathrm{e}^{-(n+1)t} [p - (n+1)t]$. On trouve

$$\mathrm{N}_p(f_n) = \left(\frac{p}{n+1}\right)^p \mathrm{e}^{-p}$$

d'où
$$\frac{|f_n(0)|}{\mathrm{N}_p(f_n)} = \left(\frac{n+1}{p}\right)^p \mathrm{e}^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \Phi_c \text{ est continue si et seulement si } c \in \mathbb{R}^*.}$

3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Sans perte de généralité, on suppose $p < q$. Avec la même famille de fonctions $(f_n)_n$ qu'à la question précédente, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{N}_p(f_n)}{\mathrm{N}_q(f_n)} = \frac{p^p}{q^p}(n+1)^{q-p} \mathrm{e}^{q-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On conclut

$$\boxed{\text{Pour } p,\ q \text{ entiers non nuls distincts, les normes } \mathrm{N}_p \text{ et } \mathrm{N}_q \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 6 (Mines-Telecom 2021)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ muni de la norme définie par $\|\mathrm{P}\| = \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ avec $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$. Pour $b \in \mathbb{C}$, on pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(b)$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f.

Corrigé : 1. Immédiat.

2. Supposons $|b| < 1$. Pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$, on a par inégalité triangulaire

$$|f(\mathrm{P})| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\,|b|^k \leqslant \|\mathrm{P}\| \sum_{k=0}^{n} |b|^k \quad \text{avec} \quad n = \deg \mathrm{P}$$

d'où
$$|f(\mathrm{P})| \leqslant \|\mathrm{P}\| \frac{1 - |b|^{n+1}}{1 - |b|} \leqslant \|\mathrm{P}\| \frac{1}{1 - |b|}$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien en zéro et donc la continuité de f. Supposons $|b| \geqslant 1$. On pose $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{X}}{b}\right)^k$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{P}_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{P}_n) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

On en déduit que f n'est pas continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est continue si et seulement si } |b| < 1.}$$

Exercice 7 (Mines 2022)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n, φ la fonction indicatrice d'Euler et ζ le fonction de Riemann.

1. Montrer $\qquad \forall \alpha > 1 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$

   Que dire pour $\alpha \leqslant 1$?

2. Montrer $\qquad \forall \alpha > 2 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$

   Que dire pour $\alpha \leqslant 2$?

Corrigé : 1. Soit α réel. On opte pour le point de vue des familles sommables. Pour n entier non nul, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n. On a dans $[0\,;+\infty]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{d \in \mathrm{D}_n} \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

On pose $\qquad \Lambda = \{(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ : \ d|n\}$

La famille $(\{n\} \times \mathrm{D}_n)_{n \geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de Λ. Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{d \in \mathrm{D}_n} \frac{1}{n^\alpha} \right) = \sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha}$$

On pose $\qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_k = \{(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n = dk\}$

La famille $(\mathrm{I}_k)_{k \geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de Λ et par sommation par paquets de familles à termes positifs, il vient

$$\sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,d) \in \mathrm{I}_k} \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

On remarque $\qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_k = \{(dk,d),\ d \in \mathbb{N}^*\}$

On obtient $\qquad \sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{(dk)^\alpha} \right) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^\alpha} \right) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)^2$

autrement dit $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)^2$

l'égalité ayant lieu dans $[0\,;+\infty]$ pour tout α réel. Enfin, on a par critère de Riemann

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty \iff \alpha \leqslant 1$$

Et on conclut $\qquad \boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \begin{cases} \zeta(\alpha)^2 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

2. Soit α réel. Dans $[0\,;+\infty]$, d'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs, il vient

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)=\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{\varphi(n)}{(kn)^\alpha}$$

On pose $\qquad \forall \ell\in\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_\ell=\{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid kn=\ell\}$

La famille $(\mathrm{J}_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et par sommation par paquets de famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{\varphi(n)}{(kn)^\alpha}=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,n)\in\mathrm{J}_\ell}\frac{\varphi(n)}{\ell^\alpha}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^\alpha}\sum_{n\mid\ell}\varphi(n)$$

Puis, on observe pour ℓ entier non nul

$$[\![1\,;\,\ell]\!]=\bigsqcup_{n\mid\ell}\{k\in[\![1\,;\,\ell]\!] \mid k\wedge\ell=n\}$$

et pour n diviseur de ℓ et $k\in[\![1\,;\,\ell]\!]$ tel que $k\wedge\ell=n$, il existe un unique $d\in[\![1\,;\,\ell/n]\!]$ tel que $k=nd$ et $d\wedge\ell/n=1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\ell&=\sum_{n\mid\ell}\mathrm{Card}\ \{k\in[\![1\,;\,\ell]\!] \mid k\wedge\ell=n\}\\&=\sum_{n\mid\ell}\mathrm{Card}\ \{d\in[\![1\,;\,\ell/n]\!] \mid d\wedge\ell/n=1\}=\sum_{n\mid\ell}\varphi\left(\frac{\ell}{n}\right)=\sum_{n\mid\ell}\varphi(n)\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que l'application $n\mapsto\dfrac{\ell}{n}$ réalise une permutation de l'ensemble des diviseurs de ℓ. Par conséquent

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^{\alpha-1}}$$

Par critère de Riemann, il vient pour $\alpha>2$

$$\zeta(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=\zeta(\alpha-1)$$

et pour $\alpha\in\,]\,1\,;2\,]$ $$\zeta(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=+\infty$$

Enfin, la minoration $\varphi(n)\geqslant 1$ pour n entier non nul prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=+\infty$ pour $\alpha\leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} & \text{si } \alpha>2\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}}$$

Exercice 8 (Mines-Telecom 2021)

1. Justifier l'existence de $m = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels le minimum est atteint.

Corrigé : 1. L'ensemble $\left\{ \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ admet une borne inférieure finie en tant que partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(1, \mathrm{X})$. On a

$$\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b\|^2 = \underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{X}^2 - \mathrm{P}\|^2$$

Par continuité et croissance de $u \mapsto u^2$ sur $[\,0\,; +\infty\,[$, il vient

$$\underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{X}^2 - \mathrm{P}\|^2 = \left(\underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{X}^2 - \mathrm{P}\| \right)^2$$

Par caractérisation métrique du projeté orthogonal sur F sev de dimension finie, on obtient

$$\underset{\mathrm{P}\in\mathrm{F}}{\mathrm{Inf}} \|\mathrm{X}^2 - \mathrm{P}\| = \|\mathrm{X}^2 - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^2)\|$$

Notant $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^2) = \alpha\mathrm{X} + \beta$ avec α, β réels, on conclut

$$\boxed{\text{La quantité } m = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t \text{ est bien définie avec } m = \|\mathrm{X}^2 - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X})\|^2.}$$

2. Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, on a

$$\mathrm{X}^2 - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^2) \in \mathrm{F}^\perp \iff \begin{cases} \langle \mathrm{X}^2 - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^2), 1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{X}^2 - p_{\mathrm{F}}(\mathrm{X}^2), \mathrm{X}\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle \mathrm{X},1\rangle \\ \langle 1,\mathrm{X}\rangle & \langle \mathrm{X},\mathrm{X}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{X}^2,1\rangle \\ \langle \mathrm{X}^2,\mathrm{X}\rangle \end{pmatrix}$$

Tous calculs effectués, on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

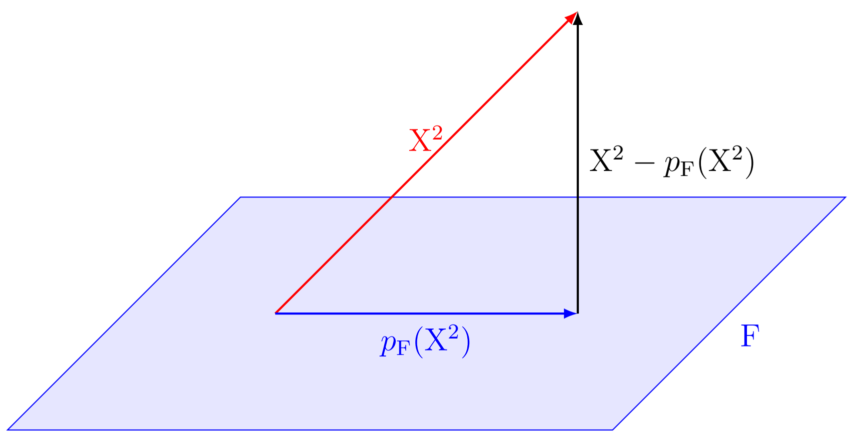

FIGURE 1 – Décomposition d'une projection orthogonale

On conclut

$$\boxed{\text{L'unique couple en lequel le minimum est atteint est } (a,b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right).}$$

Exercice 9 (CCINP 2023)

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice A est diagonalisable ;
2. $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathcal{N} \iff \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

Corrigé : Supposons la matrice A diagonalisable. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \mathcal{N}$. On sait que l'ordre de nilpotence est $\leqslant n$ d'où $\mathrm{P}^n(\mathrm{A}) = 0$. Par conséquent, on a $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}^n$. Or, le polynôme π_{A} est scindé à racines simples d'où $\pi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)$. Par suite, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, on a $(\mathrm{X}-\lambda) | \mathrm{P}^n$ d'où $\mathrm{P}^n(\lambda) = 0$ ce qui prouve $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. Comme les $\mathrm{X} - \lambda$ sont premiers entre eux pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, il s'ensuit $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}$ d'où $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$. Le sens indirect est immédiat. Supposons désormais que la deuxième condition est satisfaite. On pose $\mathrm{P} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)$ et on a $\mathrm{P}^n = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^n$. Or, dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on a $\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{m_\lambda}$ avec $m_\lambda \leqslant \deg \chi_{\mathrm{A}} = n$ d'où $\chi_{\mathrm{A}} | \mathrm{P}^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0$ d'où $\mathrm{P}^n(\mathrm{A}) = 0$ et par conséquent $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ avec P scindé à racines simples, ce qui prouve que la matrice A est diagonalisable. On conclut

$$\boxed{\text{Les conditions sont équivalentes.}}$$

Exercice 10 (Centrale 2018)

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top\mathrm{B})$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. On suppose $n=2$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$ avec $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{R})$.
   (b) Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. À l'aide des applications définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_\mathrm{M} : x \mapsto \mathrm{R}\exp(x\mathrm{M})$ et $f_\mathrm{M} : x \mapsto \|\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{M}(x)\|^2$, montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$. On a $\varphi^2 = \mathrm{id}$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ sans difficulté. Par conséquent, l'application φ est une symétrie orthogonale et il s'ensuit

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{id}\,)$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

2. Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ réel. Pour θ réel, on a

$$\mathrm{R}(-\theta)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 3\sin\theta & \cos\theta + \sin\theta \\ 3\cos\theta - \sin\theta & \cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \mathrm{R}(-\theta)\mathrm{A} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) &\iff \cos\theta + \sin\theta = 3\cos\theta - \sin\theta \\ &\iff \cos\theta = \sin\theta \iff \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \end{aligned}$$

On choisit par exemple $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et on trouve

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{RS} \quad \text{avec} \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3.(a) On rappelle que $\qquad \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n, \det \mathrm{M} = 1\right\}$

Les applications $\psi_1 : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ et $\psi_2 : \mathrm{M} \mapsto \det \mathrm{M}$ sont à coordonnées polynomiales en les coefficients de la matrice et sont par conséquent continues. Ainsi, l'égalité

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \psi_1^{-1}(\{\mathrm{I}_n\}) \cap \psi_2^{-1}(\{1\})$$

garantit la fermeture de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On a clairement $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n})$ ce qui prouve que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie E et par conséquent l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact. Enfin, notons $h : \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{R} \mapsto \|\mathrm{A} - \mathrm{R}\|$. Par définition, on a $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} h$. Or, l'application h est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire inverse donc continue sur le compact $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'application h atteint son minimum ce qui prouve

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{R}).}$$

3.(b) Soit x réel et $\mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\varphi_\mathrm{M}(x)^\top \varphi_\mathrm{M}(x) = \exp(-x\mathrm{M})\mathrm{R}^\top\mathrm{R}\exp(x\mathrm{M}) = \exp -x\mathrm{M} \exp x\mathrm{M}) = \mathrm{I}_n$$

et $$\det \varphi_x(\mathrm{M}) = \exp(x \operatorname{Tr} \mathrm{M}) = \exp(0_{\mathrm{E}}) = 1$$

Ainsi, l'application φ_{M} est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Avec $\varphi_{\mathrm{M}}(0)\mathrm{R}$, on en déduit que l'application f_{M} admet un minimum en 0. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{\mathrm{M}}(x) = \langle \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A}, \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A} \rangle$$

comme φ_{M} est dérivable sur $\mathbb{R}$ par dérivabilité de l'exponentielle matricielle, il s'ensuit par bilinéarité du produit scalaire que f_{M} est dérivable avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'_{\mathrm{M}}(x) = 2\,\langle \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A}, \varphi'_{\mathrm{M}}(x) \rangle \quad \text{avec} \quad \varphi'_{\mathrm{M}}(x) = \mathrm{RM}\exp(x\mathrm{M})$$

Comme la fonction f_{M} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un minimum en 0, on a

$$f'_{\mathrm{M}}(0) = 2\,\langle \mathrm{R} - \mathrm{A}, \mathrm{RM} \rangle = 0$$

et comme le choix de M est quelconque dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on a donc montré

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{R} - \mathrm{A}, \mathrm{RM} \rangle = 0$$

La matrice $\mathrm{R}^\top$ est une matrice d'isométrie donc par conservation du produit scalaire, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \left\langle \mathrm{R}^\top(\mathrm{R} - \mathrm{A}), \mathrm{R}^\top\mathrm{RM} \right\rangle = \left\langle \mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A}, \mathrm{M} \right\rangle = 0$$

autrement dit $$\mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

Il s'ensuit $$\mathrm{S} = \mathrm{R}^\top\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

Et on conclut $$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{A} = \mathrm{RS}.}$$

Exercice 11 (Centrale 2021)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

1. Justifier l'existence de I_n pour n entier non nul puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.
2. (a) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n pour n entier non nul.
   (b) En déduire un réel α tel que la suite $(\ln(n^\alpha \mathrm{I}_n))_n$ converge.
3. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_1(t)$$

La fonction f_1 est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann puisque $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. La domination assure l'intégrabilité de f_n pour tout n entier non nul et d'après le théorème de convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien définie et } \mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$$

2.(a) Soit n entier non nul. On a

$$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(1+t^3)^n} - \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\right]\,\mathrm{d}t$$

Il vient par linéarité car convergence des intégrales concernée

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = -\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{3n(1+t^3)^n}$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$-\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Par intégration par parties et convergence de l'intégrale concernée, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{(3n(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Ainsi $$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = -\frac{1}{3n}\mathrm{I}_n$$

On conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n}$$

2.(b) Soit n entier non nul. On a

$$\ln\left(\frac{(n+1)^\alpha \mathrm{I}_{n+1}}{n^\alpha \mathrm{I}_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = \frac{3\alpha-1}{3n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série $\sum \left[\ln\left((n+1)^\alpha \mathrm{I}_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha \mathrm{I}_n\right)\right]$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{3}$. D'après le lien suite/série téléscopique, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(n^{\alpha}\mathrm{I}_n))_n \text{ converge si et seulement si } \alpha = \frac{1}{3}.}$$

3. Soit n entier non. Avec le changement de variables $t = \dfrac{u}{n^{\frac{1}{3}}}$, les intégrales étant de même nature, il vient

$$n^{\frac{1}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{u^3}{n}\right)^n}$$

On observe $\quad \forall u \geqslant 0 \quad \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{u^3}{n}\right)^n} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{u^3}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\left(\frac{u^3}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-u^3}$

Avec l'inégalité $\quad \forall x \geqslant 0 \quad (1+x)^n = 1 + nx + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx$

On obtient

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^3}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1+u^3}$$

La dominante étant intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$, on conclut par convergence dominée

$$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 12 (Mines 2022)

Pour n entier non nul, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} \qquad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer l'existence de ℓ réel à préciser tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Pour n entier non nul, exprimer u_{2n} en fonction de v_{2n} et w_n.
3. Montrer qu'il existe γ réel tel que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On reconnaît une somme de Riemann dans l'écriture de x_n. Posant $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$, il vient par relation de Chasles

$$x_n - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) \mathrm{d}t$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$ donc C-lipschitzienne avec une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$. Par inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_n - \ln 2| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \mathrm{C} \underbrace{\left| \frac{k}{n} - t \right|}_{\leqslant \frac{1}{n}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{C}}{n}$$

Ainsi
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln 2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$u_{2n} + v_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^k + 1\right) \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{1\leqslant 2k \leqslant 2n} \frac{\ln(2k)}{2k}$$

D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{2n} = w_n - v_{2n}}$$

3. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad y_n = \mathrm{H}_n - \ln n$$

On a
$$\forall n \geqslant 2 \qquad y_n - y_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit, par comparaison et critère de Riemann, que la série téléscopique $\sum\limits_{n\geqslant 2} (y_n - y_{n-1})$ converge ce qui prouve la convergence de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$, autrement dit

$$\boxed{\text{Il existe } \gamma \text{ réel tel que } \mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)}$$

Remarque : La constante γ est la célèbre *constante d'Euler*.

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ décroît sur $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ après étude et par conséquent, la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ est telle que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît à partir d'un certain rang et tend vers zéro par croissances comparées. On en déduit

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

Toute suite extraite d'une suite convergente étant convergente vers la même limite, on a

$$u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Pour n entier non nul, il vient

$$u_{2n} = w_n - v_{2n} = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k+n)}{k+n}$$

d'où
$$u_{2n} = \mathrm{H}_n \ln 2 - x_n \ln n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}$$

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann avec $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1) \underset{n\to+\infty}{=} \left[\frac{1}{2}\ln(1+t)^2\right]_0^1 + \mathrm{o}(1)$$

D'après le résultat des questions précédentes, il vient

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln 2\,(\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)) - \ln n\left(\ln 2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{(\ln 2)^2}{2} + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$$

Exercice 13 (Mines 2017)

Soit $p \in \,]0\,;1[$ et $q = 1-p$. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \qquad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n - np}{\sqrt{npq}}$$

1. Donner la loi et la fonction génératrice de S_n.
2. Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$, $\mathbb{V}(\mathrm{T}_n)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$ pour $x > 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(x^{\mathrm{T}_n})$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La variable aléatoire S_n est somme de n variables indépendantes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{S}_n \sim \mathscr{B}(n,p) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = (pt+1-p)^n}$$

2. Soit n entier non nul. On a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i - p) = 0$$

Puis, par indépendance des X_i, il vient

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{npq} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{nqp} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) = \frac{npq}{npq}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}_n) = 1}$$

Remarque : La variable aléatoire T_n est dite *centrée réduite.*

3. Soit $x > 0$. Par indépendance des X_i, on trouve

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \mathbb{E}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - p)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(x^{\frac{\mathrm{X}_i - p}{\sqrt{npq}}}\right)$$

Puis par transfert, on obtient

$$\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) = \left(p x^{\sqrt{\frac{q}{np}}} + q x^{-\sqrt{\frac{p}{nq}}}\right)^n = \left[p \exp\left(\sqrt{\frac{q}{np}} \ln x\right) + q \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}} \ln x\right)\right]^n$$

Avec un développement limité à l'ordre deux, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) &= \left[p\left(1 + \sqrt{\frac{q}{np}} \ln x + \frac{q}{2np} (\ln x)^2\right) + q\left(1 - \sqrt{\frac{p}{nq}} \ln x + \frac{p}{2nq} (\ln x)^2\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \\
&= \left[\frac{p+q}{2n} (\ln x)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{(\ln x)^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[\frac{(\ln x)^2}{2} + \mathrm{o}(1)\right]
\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathbb{E}\left(x^{\mathrm{T}_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\frac{(\ln x)^2}{2}}}$$

Remarque : Ce résultat est une conséquence du *théorème de la limite centrée* ou de son corollaire qu'est le théorème de Moivre-Laplace.

Exercice 14 (Centrale 2021)

Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes identiquement distribuées et $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul.

1. Montrer $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2. Soit $s > 0$. Montrer

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant s) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$$

En déduire une majoration de $\mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant s)$. Optimiser cette majoration.

3. (a) Soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Montrer $\quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right) = 0$

(b) En déduire $\qquad \dfrac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad$ p.s.

Corrigé : 1. Avec les développements en série entière usuels, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!2^n}$$

Pour n entier, on a

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k = \prod_{k=1}^{n} (2k) \times \prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 2^n n! \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \geqslant 2^n n!$$

Par comparaison et sommation, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} t \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

2. Soit $t \geqslant 0$ et n entier non nul. Par croissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, on a $\{\mathrm{S}_n \geqslant s\} \subset \left\{\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{ts}\right\}$ et d'après l'inégalité de Markov, la variable $\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}$ étant positive et finie donc d'espérance finie, il vient

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant s) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{ts}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-ts}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}\right)$$

Or, par indépendance des X_i, on a

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}\right)$$

et par transfert $\qquad \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_1}\right) = \mathrm{e}^{t}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) + \mathrm{e}^{-t}\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = -1) = \operatorname{ch} t$

d'où $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant s) \leqslant \mathrm{e}^{-ts} \operatorname{ch}^n t$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant s) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)}$

Les variables $-\mathrm{X}_i$ sont indépendantes de même loi que les X_i donc $-\mathrm{S}_n$ suit la même loi que S_n. Ainsi, pour $t \geqslant 0$ et n entier non nul, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \leqslant -s) = \mathbb{P}(-\mathrm{S}_n \geqslant s) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$$

et $$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant s) = \mathbb{P}\left(\{\mathrm{S}_n \geqslant s\} \sqcup \{\mathrm{S}_n \leqslant -s\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant s) + \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \leqslant -s)$$

Par suite $$\boxed{\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant s) \leqslant 2\exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)}$$

La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nt^2}{2} - ts$ est un trinôme qu'on va minimiser pour établir la meilleure majoration possible. On trouve sans difficulté que le minimum est atteint pour $t = \dfrac{s}{n}$ et on conclut

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant s) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2n}}}$$

3.(a) Soit $\alpha > \dfrac{1}{2}$. La suite d'événements $\left(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît. Ainsi, par continuité décroissante, il vient

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right)$$

D'après le résultat de la question précédente, pour k entier non nul, on a

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{k^{2\alpha-1}}{2}}$$

Comme $2\alpha - 1 > 0$, on trouve

$$k^2\mathrm{e}^{-\frac{k^{2\alpha-1}}{2}} = \exp\left(2\ln k - \frac{k^{2\alpha-1}}{2}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. On a donc

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha) \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

ce qui prouve qu'il s'agit d'une série convergente. Par sous-addivité, on trouve

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant k^\alpha)$$

avec le majorant qui est un reste de série convergente donc de limite nulle pour $n \to +\infty$. Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|\mathrm{S}_k| \geqslant k^\alpha\}\right) = 0}$$

3.(b) Par complémentation, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_k}{k}\right| < \frac{1}{k^{1-\alpha}}\right\}\right) = 1$$

On choisit $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}\,; 1\right[$. Ainsi, on a $\dfrac{1}{k^{1-\alpha}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et par suite

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n \geqslant 1 \quad | \quad \forall k \geqslant n \qquad \left|\frac{\mathrm{S}_k}{k}\right| \leqslant \varepsilon$$

d'où $$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_k}{k}\right| < \frac{1}{k^{1-\alpha}}\right\} \subset \left\{\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$$

Enfin, l'ensemble $\left\{\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$ est bien un événement puisqu'on peut écrire

$$\left\{\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap\,]\,0\,;+\infty\,[} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right\}$$

Par croissance de la probabilité, on conclut

$$\boxed{\frac{\mathrm{S}_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}}$$

Exercice 15 (ENS 2021)

Soit φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$

2. Existe-t-il $\mathrm{C} > 0$ tel que $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \mathrm{C}n$?

Corrigé : 1. Pour $n = 1$, l'inégalité est vraie. Soit $n \geqslant 2$. On note $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers deux à deux distincts avec r entier non nul et les α_i des entiers non nuls. On a

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{n} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i/2}$$

Pour α entier non nul, on a l'équivalence

$$2^{\alpha} - 2^{\alpha-1} \geqslant \frac{2^{\alpha/2}}{2} \iff 2^{\alpha}(2-1) \geqslant 2^{\alpha/2}$$

et l'inégalité de gauche est donc vraie. Puis, soit p premier avec $p \geqslant 3$. On a l'équivalence

$$p^{\alpha} - p^{\alpha-1} \geqslant p^{\alpha/2} \iff p^{\alpha-1}(p-1)^2 \geqslant p$$

Or, on a
$$p^{\alpha-1}(p-1)^2 \geqslant (p-1)^2$$

et
$$(p-1)^2 \geqslant p \iff p^2 - 3p + 1 \geqslant 0$$

ce qui est vrai puisque $p \geqslant 3$. Comme tous les termes impliqués dans les produits de $\varphi(n)$ et $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ sont positifs, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

Remarque : Au prix de quelques efforts additionnels, on pourrait établir

$$\forall n > 6 \qquad \varphi(n) \geqslant \sqrt{n}$$

2. On note désormais $\mathcal{P} = \{p_i, i \geqslant 1\}$ l'ensemble des nombres premiers strictement ordonné. Supposons qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) \geqslant \mathrm{C}n$$

Avec $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$, il vient
$$\varphi(n) \geqslant \mathrm{C}n \iff \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geqslant \mathrm{C}$$

On a
$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^k} \geqslant \prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{p_r} \frac{1}{p_i^k} = \sum_{0 \leqslant k_1, \ldots, k_r \leqslant p_r} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}}$$

En remarquant que tout entier de $[\![1 ; p_r]\!]$ se décompose en produit de facteurs premiers inférieurs à p_r de valuations inférieures à p_r puisque $p_r \leqslant 2^{p_r} \leqslant p_i^{p_r}$ pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$, il vient

$$\sum_{0 \leqslant k_1, \ldots, k_r \leqslant p_r} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}} \geqslant \sum_{n=1}^{p_r} \frac{1}{n}$$

Par imparité des p_i à partir de $i = 2$, on a $p_{i+1} \geqslant p_i + 2$ pour tout $i \geqslant 2$ d'où $p_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$ et par suite $\sum_{n=1}^{p_r} \frac{1}{n} \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$ d'où

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

ce qui contredit $\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geqslant \mathrm{C} > 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de constante } \mathrm{C} > 0 \text{ tel que } \varphi(n) \geqslant \mathrm{C}n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$